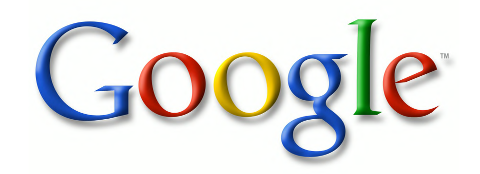
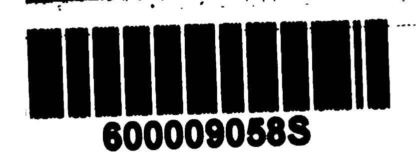


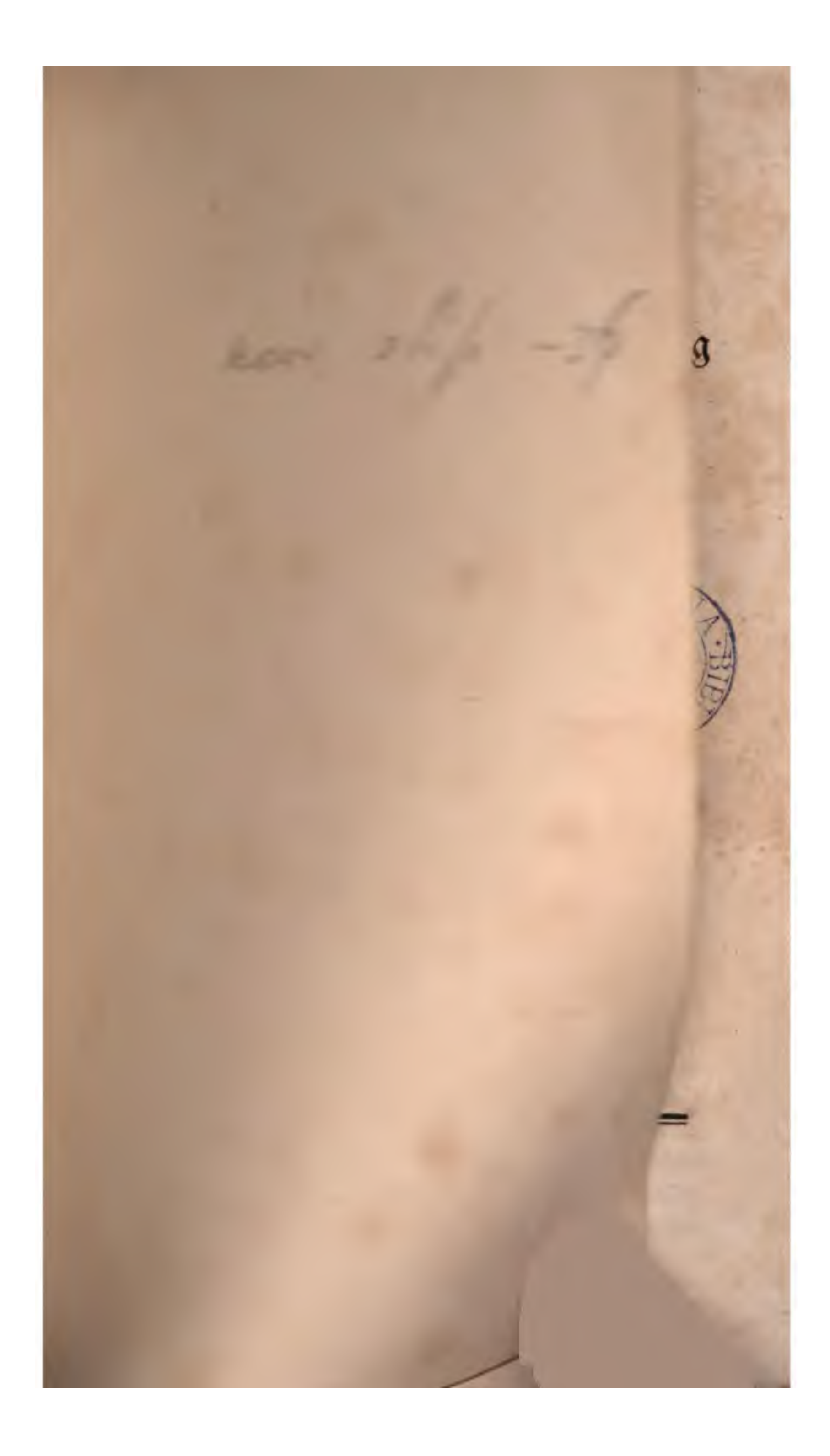





600009058S


31.
501.





Gnomonik,

oder

Anleitung zur Verfertigung aller Arten von

Sonnenuhren.

Von

J. J. Littrow,

Direktor der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität in Wien, Ritter des russ. k. St. Anna-Ordens zweiter Klasse, Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften.

Mit einer lithographirten Tafel.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold.

1831.

Eine Ebene, durch die Axe unserer Erde und durch den Mittelpunkt der Sonne gelegt, wird sich, wie die Sonne selbst, in einem wahren Tag um diese Axe drehen, und der Schatten dieser Axe, der ganz in jener Ebene liegt, wird auf der der Sonne entgegengesetzten Seite der Axe für dieselbe Tagesstunde auch immer dieselbe Stelle einnehmen, und daher auch eine auf dieser Seite der Axe stehende ebene oder krumme Fläche für jede Tagesstunde immer in derselben Linie, der Schattenlinie, schneiden. Da aber der Halbmesser unserer Erde gegen die Entfernung der Sonne von der Erde, ohne merklichen Fehler, nur als ein Punkt betrachtet werden kann, so wird dieselbe Erscheinung auch für jede andere geradlinige Axe auf irgend einem Punkte der Oberfläche der Erde Statt haben, wenn nur diese Axe mit der Erdaxe parallel gestellt wird. Ein geradliniger Stift also, der mit der Erdaxe parallel gestellt wird, oder dessen Richtung nach den Polen des Äquators geht, wird, wenn er von der Sonne beschienen wird, auf der der Sonne entgegengesetzten Seite einen Schatten werfen, und dieser Schatten wird eine auf dieser Seite stehende Fläche, an welcher etwa jener Stift in der erwähnten Lage befestiget ist, zu derselben Tageszeit immer auch in derselben geraden oder krummen Linie treffen.

Wie soll man aber, wenn diese Fläche und der in ihr in gehöriger Lage befestigte Stift gegeben ist, die Lage des Schattens dieses Stiftes auf der Fläche sowohl, als auch die Länge oder den Endpunkt dieses Schattens in der Fläche für jede Tagesstunde bestimmen? — Die Auflösung dieses Problems enthält die Gnomonik, oder die Lehre von der Verzeichnung der Sonnenuhren.

Gewöhnlich sind die Flächen, auf welche die Sonnenuhren verzeichnet werden, Ebenen, deren Lage gegen den Horizont und gegen den Meridian auf folgende Weise bestimmt wird. Man verzeichnet vor der Uhrfläche auf einer horizontalen Ebene durch das bekannte Verfahren eine horizontale Mittagslinie, und verlängert sie bis sie die Uhrebene in einem Punkte trifft. Durch diesen Punkt zieht man in der Uhrebene eine dem Horizonte parallele Gerade, und mißt den Winkel, welchen diese Gerade mit der Mittagslinie bildet. Wir wollen diesen Winkel die Abweichung der Uhrebene nennen und durch k bezeichnen, wo der Winkel k von der Mittagslinie von Süd gegen West gezählt wird. Errichtet man dann mittels einer einfachen, Jedermann bekannten Vorrichtung in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie der Uhrebene mit dem Horizonte zwei auf diese Linie senkrechte Gerade, von welchen die eine in der Uhrebene, und die andere in dem Horizonte liegt, so heißt der Winkel dieser beiden Geraden die Neigung der Uhrebene gegen den Horizont, die wir durch n bezeichnen und von Nord gegen Süd zählen wollen. Sind also von einer Uhrebene die Abweichung k und die Neigung n bekannt, so ist dadurch auch ihre Lage gegeben.

Der Stift oder Stiel der Uhr muß nach dem Vorhergehenden immer in einer der Weltaxe parallelen Lage befestigt werden, so daß er, verlängert, genau durch den Nord- und Südpol des Äquators geht, oder auf der Ebene des Äquators senkrecht steht. Wir werden weiter unten die Mittel kennen lernen, durch welche bei jeder Uhrebene der Stiel in diese Lage gebracht werden kann. Hier ist es genug, zu bemerken, daß er erstens in der Ebene liegen muß, die auf der bereits erwähnten horizontalen Mittagslinie der Uhr senkrecht steht, und daß er zweitens mit einer in dieser Ebene gezogenen horizontalen Linie einen Winkel bilden muß, der gleich der Polhöhe des Ortes, oder gleich der geogra-

phischen Breite desselben ist. Wenn die Lage des Stieles diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist er mit der Erdaxe parallel, und hat daher die für jede Sonnenuhr geforderte Stellung.

Daß bei den Sonnenuhren auf die Ungleichheiten der *täglichen* Bewegung der Sonne, welche von der Refraktion und Parallaxe entstehen, nicht gesehen wird, darf hier nicht erst erinnert werden. Es würde leicht seyn, von diesen Änderungen Rechnung zu tragen, wenn sie bei Instrumenten dieser Art für wichtig genug gehalten werden könnten.

Übrigens ist meine Absicht, die hieher gehörenden Betrachtungen mit den einfachsten Fällen anzufangen, und von *ihnen allmählich* zu den mehr zusammen gesetzten Untersuchungen aufzusteigen, um dadurch den ganzen an sich sehr interessanten Gegenstand für einen größern Kreis von Lesern anwendbar zu machen.

---

§. 1.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die einfachste aller Sonnenuhren die

Äquinoktialuhr

ist, d. h. ein in 24 gleiche Theile eingetheilter Kreis, dessen Ebene dem Äquator parallel gelegt wird, und dessen auf dieser Ebene senkrechte Axe, die hier der Stiel der Uhr ist, mit der Weltaxe zusammen fällt. Sey O (Fig. 1) der Mittelpunkt dieses Kreises $\varrho\,\sigma$, und A O P der auf die Ebene dieses Kreises durch den Mittelpunkt desselben senkrecht stehende Stiel. Bringt man diesen Stiel in die Ebene des Meridians R A P, und neigt ihn gegen die horizontale Linie A R, um den Winkel R A P $= \varphi$, wo φ die Polhöhe oder die geographische Breite des Ortes, wo die Uhr aufgestellt wird, bezeichnet, so ist die Durchschnittslinie O ϱ dieses Kreises mit der Ebene des Meridians, die Schattenlinie des Stiels für den

Augenblick des wahren Mittags, und daher ϱ der erste jener 24 gleichen Theilungspunkte der Peripherie des Kreises. Die dem Punkte ϱ nächstfolgenden Theilungspunkte auf der Ostseite von $O\varrho$ gehören für 1, 2, 3 ... Uhr nach dem Mittage, so wie die dem ϱ nächstvorhergehenden Theilungspunkte auf der Westseite für die 11, 10, 9te ... Stunde vor dem Mittage gehören. Wenn die Deklination der Sonne nördlich ist, so wird nur die obere, bei P liegende Seite des Kreises $O\varrho\sigma$ beschienen, so wie für südliche Deklinationen nur die untere Seite desselben beleuchtet wird. Es müssen daher beide Seiten des Kreises auf gleiche Weise eingetheilt, und der Stiel OP auch auf die untere Seite, nach A, fortgesetzt werden.

§. 2.

Mit Hülfe einer solchen genau gezeichneten Äquinoktialuhr läßt sich dann auch auf jeder andern ebenen oder krummen Fläche durch folgendes praktische Verfahren eine Sonnenuhr anbringen.

Man stellt vor dieser Fläche, in angemessener Entfernung von derselben, die Äquinoktialuhr so auf, daß ihr Stiel AP in der Ebene des Meridians liege, und mit einer horizontalen Linie AR einen der Polhöhe φ gleichen Winkel RAP bilde. Man verlängere dann, etwa durch gespannte Fäden, den Stiel OP sowohl, als auch die verschiedenen Schattenlinien $O\varrho$, $O\sigma$ ... der Äquinoktialuhr, bis diese Verlängerungen jene Ebene treffen. Der Punkt, in welcher die Verlängerung des Stiels der Fläche begegnet, ist der Ort, in welchem der neue Stiel, und zwar in der Richtung des Fades PO an der Fläche befestiget werden soll. Verbindet man dann diesen Punkt der Fläche nach und nach mit allen den übrigen Punkten, in welchen die verlängerten Linien der Äquinoktialuhr der Fläche begegneten, so erhält man die entsprechenden Schattenlinien der neuen Uhr.

Dasselbe Verfahren bahnt zugleich einen einfachen Weg,

die Lage der Schattenlinien bei allen übrigen Uhren aus der Äquinoktialuhr durch die Analyse abzuleiten.

Wir wollen nun die vorzüglichsten dieser Uhren, so fern sie auf Ebenen verzeichnet werden, näher betrachten.

Horizontaluhr.

§. 3.

Die Schattenlinien dieser Uhr liegen auf einer horizontalen Ebene. Sey ARS diese horizontale Ebene (Fig. 1), welche von der ringsum erweiterten Ebene $O\varrho\sigma$ der Äquinoktialuhr, oder von der Ebene des Äquators in der Linie RS getroffen wird. Der Durchschnitt RA der Ebene des Meridians RAP mit dem Horizonte, oder die Mittagslinie RA ist daher auf RS senkrecht, so wie die Ebene des Kreises $O\varrho\sigma$ auf den Stiel AP senkrecht steht. Es ist also $ARS = AOR = ORS = 90°$. Ferner ist $RAP = \varphi$, und für irgend einen Stundenwinkel $\varrho O\sigma = ROS = s$ der Sonne, die Schattenlinie in der Horizontaluhr gleich AS. Nennt man daher ψ diesen Winkel RAS der Schattenlinie AS mit der Mittagslinie AR, so hat man

$$RS = OR\ tang.\ s \text{ und}$$
$$RS = AR\ tang.\ \psi, \text{ also}$$
$$tang.\ \psi = \frac{OR}{AR}\ tang.\ s.$$

Aber in dem Dreiecke OAR ist $\frac{OR}{AR} = sin.\ \varphi$, also ist auch

$$tang.\ \psi = sin.\ \varphi\ tang.\ s,$$

und durch diese Gleichung wird man auf der Uhrebene die Schattenlinie für die einzelnen Stunden $s = 0$, $15°$, $30°$, $45°$ ... bestimmen. Legt man dann diese Uhrebene z. B. mit Hülfe einer Libelle horizontal, und bringt die Schattenlinie AR für die Mittagsstunde, wo $s = 0$ ist, in die Ebene des Meridians, oder in die Mittagslinie, so wird die Uhr orien-

tirt seyn, oder der Schatten des Stiels A P wird im Anfange der wahren Sonnenstunden o, 1, 2, 3 ... auf die vorhin bezeichneten Schattenlinien fallen.

Da die vormittägigen Schatten westlich, und die nachmittägigen östlich von der Linie A R fallen, und da man gewöhnlich die westlichen Stundenwinkel der Sonne positiv, die östlichen aber negativ nimmt, so wird man, wenn man die Schattenwinkel ψ mit den Stundenwinkeln s zugleich positiv und zugleich negativ annimmt, in der letzten Gleichung das Zeichen von ψ ändern, oder man wird haben $tang.\ \psi = -\sin.\ \varphi\ tang\ s.$

I. Beschreibt man um A als Mittelpunkt mit einem willkürlichen Halbmesser eine Kugel, welche die Linien A P, A S, A R resp. in den Punkten p, s und r schneidet, so erhält man ein sphärisches Dreieck p s r, in welchem man hat $pr = \varphi$, $rs = \psi$, $rps = s$ und $p\hat{r}s = 90^\circ$, also ist auch

$$tang.\ \omega = \sin.\ \varphi\ tang.\ s \text{ wie zuvor.}$$

II. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist auch $tang.\ \omega = tang.\ s$ oder $\omega = s$, wie für die Äquinoktialuhr. In der That ist für die Bewohner des Pols die Horizontaluhr zugleich eine Äquinoktialuhr, weil ihr Horizont mit dem Äquator zusammenfällt.

III. Eine solche genau verzeichnete Horizontaluhr wird man dann ebenfalls, wie §. 2, als ein bequemes Mittel anwenden können, auch an jeder andern ebenen oder krummen Uhrfläche eine Sonnenuhr zu verfertigen. Zu diesem Zwecke wird man die Horizontaluhr vor die Uhrfläche, etwa auf einem sichern Tische, in der gehörigen Lage aufstellen, so daß ihre Ebene horizontal, und ihre mittägige Schattenlinie genau in der Mittagslinie liegt. Verlängert man dann z. B. durch gespannte Fäden den Stiel der Horizontaluhr, bis er die neue Uhrfläche trifft, so wird der Faden den Fußpunkt des Stiels, wo er die Uhrfläche trifft, sowohl, als auch die Lage des neuen Stieles angeben, in welcher er in der Uhrfläche befestiget werden soll.

Verlängert man eben so die Schattenlinien der Horizontaluhr, bis sie die neue Uhrfläche treffen, so werden sie in dieser Uhrfläche die Punkte angeben, welche man mit dem Fußpunkte des Stieles vereinigen wird, um die entsprechenden Schattenlinien der neuen Uhr zu erhalten. Bei krummen Uhrflächen wird man, wenn der Schatten des alten Stiels die Schattenlinien der Horizontaluhr trifft, die krummen Schattenlinien des neuen Stiels in der Uhrfläche verzeichnen, zu welchem Zwecke man sich auch, in Ermanglung der Sonne, einer Lampe bei Nacht bedienen kann. Wir werden später wieder auf diese bloß mechanische Verzeichnung zurückkommen.

Vertikale Mittagsuhr.

§. 4.

Die Uhrebene einer vertikalen Mittagsuhr ist eine vertikale, auf der Mittagslinie senkrecht stehende Ebene. Sey RSP diese Ebene, und AR die Mittagslinie, ARS der Horizont, also ARP = ARS = 90°. Da wieder RSO die Ebene des Äquators bezeichnet, so ist auch der Winkel SRO = 90 und RAP = ORP = φ, so wie ARO = APR = 90° — φ. Man hat daher

$$RS = OR \; tang. \, s,$$

und wenn RPS = ψ den Schattenwinkel bezeichnet,

$$RS = RP \; tang. \, \psi, \text{ also auch}$$

$$tang. \, \psi = \frac{OR}{RP} \; tang. \, s.$$

Aber $\frac{OR}{RP} = cos. \, \varphi$, und daher

$$tang. \, \psi = cos. \, \varphi \; tang. \, s.$$

Um daher auf der vertikalen Mittagsebene RSP um den gegebenen Punkt P eine Sonnenuhr zu verzeichnen, wird man von dem Punkte P in der Ebene die vertikale Linie PR ziehen, durch diese Linie eine auf die Uhrebene senkrechte Ebene stellen, und in dieser letzten Ebene den Winkel

RPA $= 90^\circ - \varphi$ verzeichnen. Der Schenkel PA dieses Winkels gibt die Richtung, in welcher der Stiel in dem Punkte P der Uhrebene befestiget werden muß. Dann bestimmt man die Schattenwinkel RPS $= \psi$ der Schattenlinien PS mit der Vertikale PR für die verschiedenen Stundenwinkel s der Sonne durch die Gleichung

$$tang.\, \psi = cos.\, \varphi\ tang.\, s.$$

I. Beschreibt man um P als Mittelpunkt eine Kugel, welche die Linien PA, PR und PS resp. in a, r und s trifft, so hat man in dem sphärischen Dreiecke ars

ar $= 90^\circ - \varphi$, rs $= \psi$, ras $=$ s und ars $= 90^\circ$, also auch

$$tang.\, \psi = cos.\, \varphi\ tang.\, s, \text{ wie zuvor.}$$

II. Wir haben oben gefunden, daß man für eine horizontale Uhr und für einen Ort der Erde, dessen Polhöhe φ' ist, hat

$$tang.\, \psi = sin.\, \varphi'\ tang.\, s.$$

Dieselbe Uhr wird aber für einen andern Ort, dessen Polhöhe φ um 90 Grade größer ist, eine vertikale Mittagsuhr seyn. Setzt man daher $\varphi' = 90^\circ + \varphi$, so gibt die letzte Gleichung

$$tang.\, \psi = cos.\, \varphi\ tang.\, s$$

für die vertikale Mittagsuhr des Ortes, dessen Polhöhe φ ist, wie zuvor.

Schiefe Vertikaluhren.

§. 5.

Die Ebene dieser Uhren steht, wie die unmittelbar vorhergehende, auf dem Horizonte senkrecht, bildet aber mit der Mittagslinie irgend einen schiefen Winkel k.

Sey BPS, Fig. 2, diese Ebene und P der Punkt, in welchem der Stiel befestiget werden soll. Der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Horizonte ABS sey die Linie BS. Von dem Punkte P fälle man in der Uhrebene auf den Horizont, oder, was dasselbe ist, auf die Linie BS die Vertikale PR, welche

Vertikale die **Basis** der Uhr heißt. Sey die horizontale Linie RA die Mittagslinie, also der Winkel ARS = k die Deklination der Uhrebene.

Um zuerst den Stiel in dem Punkte P in der gehörigen, der Weltaxe parallelen Lage befestigen zu können, sey PB die Linie, in welcher die Uhrebene von einer andern Ebene getroffen wird, die durch den Stiel geht und senkrecht auf der Uhrebene steht. Man bestimme den Winkel RPB = f in der Uhrebene, und den Winkel BPA = g in der erwähnten, auf die Uhrebene senkrechten Ebene, wo PA die verlangte Lage des Stieles ist. Man nennt die Linie PB die **Substilarlinie** der Uhr.

Beschreibt man um P als Mittelpunkt eine Kugel, welche die Linien PA, PB, PR in a, b, r schneidet, so hat man in dem sphärischen Dreiecke abr die Seite br = f, ab = g und ar = 90° — φ und den Winkel bra = 180° — k und abr = 90°, also ist

$$\begin{aligned} tang.\ f &= -\ cotang.\ \varphi\ cos.\ k \\ sin.\ g &= \quad cos.\ \varphi\ sin.\ k. \end{aligned}$$

Um nun auch den Winkel RPS = ψ der Schattenlinie PS mit der Basis PR für jeden Stundenwinkel s zu finden, so hat man, wenn jene Kugel die Linie PS in s schneidet, in dem sphärischen Dreiecke ars die Seite ar = 90° — φ, rs = ψ und den Winkel ars = k und ras = s, also ist

$$cotang.\ \psi = \frac{cotang.\,s\ sin.\,k + cos.\,k\ sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi}.$$

Das Verfahren reduzirt sich daher auf folgende Operationen. Von dem gegebenen Punkte P der Uhrebene errichte man in dieser Ebene eine vertikale PR, die Basis der Uhr, und bestimme in dieser Ebene die Lage der Substilarlinie PB durch den Winkel RPB = f. Durch diese Substilarlinie errichte man eine auf der Uhrebene senkrechte Ebene, und nehme in dieser senkrechten Ebene den Winkel BPA = g, so ist PA die Lage, in welcher der Stiel in dem Punkte P der

Uhrebene befestiget werden muß. Endlich verzeichnet man für jeden Stundenwinkel s die Winkel RPS $= \psi$ der Schattenlinie PS mit der Basis PR durch die letzte Gleichung.

Zieht man es vor, die Schattenlinie PS durch ihren Winkel SPB $=$ w mit der Substilarlinie zu zeichnen, so hat man $w = \psi + f$, also auch

$$tang.\, w = \frac{tang.\, \psi + tang.\, f}{1 - tang.\, \psi\; tang.\, f},$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von *tang.* ψ und *tang.* f substituirt,

$$tang.\, w = \frac{cos.\, \varphi\; sin.\, k\; (sin.\, \varphi\; sin.\, k\; tang.\, s - cos.\, k)}{cos.\, k\; tang.\, s + sin.\, \varphi\; sin.\, k}.$$

In dem Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, daß k größer als 90° ist, oder daß die Uhrebene auf der Westseite des Meridians nördlich von der Mittagsuhr stehe. Ist k kleiner als 90°, oder macht die Uhrebene mit der Mittagslinie auf der Westseite, von Süden gezählt, einen spitzigen Winkel, so fällt die Substilarlinie PB auf die andere Seite der Basis PR, oder der Winkel f ist negativ, und man hat $tang.\, f = cotang.\, \varphi\; cos.\, k$.

I. Da der Winkel ABR $=$ ARP $=$ BRP $= 90^\circ$ und ARS $=$ k, also BAR $= k - 90^\circ$ ist, so hat man auch durch ebene Trigonometrie

$$\frac{AR}{AP} = cos.\, \varphi \text{ und } \frac{AR}{RP} = cotang.\, \varphi, \text{ so wie}$$

$$\frac{BR}{AR} = -\, cos.\, k \text{ und } \frac{AB}{AR} = sin.\, k,$$

und daher $tang.\, f = \frac{BR}{RP} = \frac{BR}{AR}\, cotg.\, \varphi = -\, cotg.\, \varphi\; cos.\, k$

$$sin.\, g = \frac{AB}{AP} = \frac{AB}{AR}\, cos.\, \varphi = cos.\, \varphi\; sin.\, k,$$

wie zuvor.

Da ferner AR die Mittagslinie und ARS $=$ k ist, so hat man, wenn der Schattenwinkel für die Horizontaluhr durch u bezeichnet wird, RAS $=$ u und daher

$$RSA = 180^\circ - (k + u).$$

Es ist daher

$$\frac{RS}{AR} = \frac{sin.\ u}{sin.\ (k+u)} \text{ und } \frac{RP}{AR} = tang.\ \varphi, \text{ also auch}$$

$$\frac{RS}{RP} = \frac{sin.\ u\ cotang.\ \varphi}{sin.\ (k+u)}.$$

Man hat aber, wenn ψ den Schattenwinkel der schiefen Vertikaluhr bezeichnet, $tang.\ \psi = \frac{RS}{RP}$, also ist auch

$$tang.\ \psi = \frac{sin.\ u\ cotang.\ \varphi}{sin.\ (k+u)}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die für die Horizontaluhr oben gegebene Gleichung $tang.\ u = tang.\ s\ sin.\ \varphi$, so erhält man

$$cotang.\ \psi = \frac{cotang.\ s\ sin.\ k + cos.\ k\ sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi}, \text{ wie zuvor.}$$

§. 6.

Ist in dem vorhergehenden Ausdrucke $k = 90°$, so erhält man $f = 0$ und $g = 90 - \varphi$, und endlich

$$tang.\ \psi = tang.\ s\ cos.\ \varphi$$

für die vertikale Mittagsuhr, wie wir schon oben gefunden haben. Die Gleichung $f = 0$ zeigt, daß für diese Uhr die Basis mit der Substilarlinie zusammen fällt, und daß man daher nur durch das Loth PR eine auf die Uhrebene senkrechte Ebene legen, und in dieser letzten Ebene den Winkel $RPA = 90 - \varphi$ nehmen darf, um die Lage des Stiels PA zu erhalten, wie wir bereits oben gesehen haben.

Für $k = 0$ oder 180 erhält man die sogenannten vertikalen

Morgen- und Abenduhren,

für welche man daher hat

$$f = 90 - \varphi,\ g = 0 \text{ und } \psi = 90 - \varphi.$$

Der Stiel wird also für diese Uhren mit der Weltaxe parallel und in die Uhrebene selbst fallen, weil der Stiel mit der Substilarlinie zusammen fällt. Da er aber in dieser Lage

keinen Schatten auf die Ebene werfen kann, so bringt man ihn in einiger Entfernung von der Ebene in eine der ersten parallelen Lage, indem er in dieser Lage durch einen oder mehrere Stifte an die Uhrebene befestiget wird.

Die Schattenlinien aber sind, wie die Gleichung $\psi = 90° - \varphi$ zeigt, alle mit dem Stiele, also auch mit der Weltaxe selbst parallel. Ist a die Entfernung des Stiels von der Uhrebene oder von der ihr parallelen Substilarlinie, so ist die Distanz Δ dieser mit dem Stiele parallelen Schattenlinien von der Substilarlinie für jeden Stundenwinkel s gleich $\Delta = a \, cotang. \, s$, so daß für $s = 6^h$ der Schatten in die Substilarlinie fällt, und für $s = 0$ mit der Uhrebene parallel ist, oder sie erst in einer unendlichen Entfernung schneidet.

Wir wollen nun zu ganz willkürlich, gegen den Horizont sowohl als auch gegen den Meridian geneigten Ebenen übergehen, und auch auf diesen die Lagen der verschiedenen Schattenlinien zu bestimmen suchen.

§. 7.

Aufgabe. Auf irgend einer gegebenen Ebene eine Sonnenuhr verzeichnen.

Sey BPQS, Fig. 3, diese Ebene, die den Horizont SBR in der Linie BS schneidet. Ist P der Punkt der Ebene, in welcher der Stiel PA befestiget werden soll, so sey PR senkrecht auf den Horizont und RB senkrecht auf die Linie BS. Die Ebene des Meridians, die als eine immer vertikale Fläche durch die Linie PR geht, schneide den Horizont in der Linie RMD, so daß also MRP die auf dem Horizonte senkrecht stehende Ebene des Meridians, und DM die Mittagslinie ist. Zieht man die Linie PB, welche die Basis der Uhr heißt, und welche, so wie RB, auf BS senkrecht ist, so ist $RBP = n$ die Neigung der Uhrebene BPQS gegen den Horizont, und $DMC = k$ ist die Abweichung der Uhrebene von der Mittagslinie, oder k ist der Winkel, welchen die Durch-

schnitte der Ebene des Meridians und der Uhrebene im Horizonte bilden. Wir wollen den Winkel n von Nord gegen Süd, und den Winkel k von Süd gegen West zählen, so daß also n positiv oder kleiner als 90° ist, wenn die Uhrebene gegen Nord geneigt ist, und daß k positiv oder kleiner als 90° ist, wenn die Uhrebene ihre Westseite gegen Süd wendet.

Verbindet man den Punkt M der Uhrebene, wo der Meridian von der Linie BS geschnitten wird, mit P, so ist die in der Uhrebene liegende Linie PM die Mittagslinie der Uhr, die also der Durchschnitt der Uhrebene mit der Ebene des Meridians ist. Wir wollen den Winkel der Basis PB mit der Mittagslinie PM, oder den in der Uhrebene liegenden Winkel $BPM = \alpha$ setzen.

Denken wir uns ferner durch den Stiel PA eine auf die Uhrebene senkrechte Ebene gelegt, welche diese Uhrebene in der Linie PC schneidet, so wird, wie S. 11, PC die Substilarlinie der Uhr genannt.

Sey der in der Uhrebene liegende Winkel der Mittagslinie der Uhr mit der Substilarlinie $MPC = f$ und der auf der Uhrebene senkrecht stehende Winkel der Substilarlinie mit dem Stiele $CPA = g$. Endlich sey noch die in der Uhrebene durch P gezogene Linie PS die Schattenlinie des Stiels für irgend einen gegebenen Stundenwinkel s der Sonne.

Dieses vorausgesetzt, werden wir also zuerst aus den beyden gegebenen Größen n und k die Lage der Mittagslinie PM der Uhr gegen die durch P auf die Linie BS senkrecht gezogene, also ebenfalls gegebene Basis PB der Uhr suchen, d. h. wir werden den Winkel $BPM = \alpha$ durch die Größen n und k bestimmen. Dann werden wir durch dieselben Größen n und k den Winkel $MPC = f$ der Substilarlinie mit der Mittagslinie der Uhr suchen, der in der Ebene der Uhr liegt, und dadurch die Lage der Linie PC bestimmen. Kennt man eben so den Winkel $CPA = g$ des Stiels mit der Substilarlinie, so werden wir durch die bereits bekannte

Linie PC eine Ebene senkrecht auf die Uhrebene stellen, und in ihr den Winkel $CPA = g$ verzeichnen, wo der eine Schenkel PA dieses Winkels die Richtung seyn wird, in welchen man den Stiel PA an die Uhrebene befestigen wird. Endlich werden wir noch für jeden Werth des Stundenwinkels s der Sonne den Schatten PS des Stiels suchen, indem wir den Winkel angeben, welchen diese Schattenlinie PS mit der Substilarlinie PC, oder mit der Mittagslinie PM, oder endlich mit der Basis PB der Uhr bildet.

Denken wir uns um P als Mittelpunkt mit einem willkürlichen Halbmesser eine Kugel beschrieben. Die Oberfläche dieser Kugel schneide die Linie PR in r, PB in b, PM in m, PC in c, PA in a und PS in s. Man verbinde diese Punkte durch größte Kreise jener Kugel. Von diesem Bogen liegt bmcs in der Uhrebene, und rma in der Ebene des Meridians, da PR, PM und der Stiel PA in der Ebene des Meridians liegen. Der Bogen rb aber steht auf der hinteren, so wie der Bogen ac auf der vorderen Seite senkrecht auf der Uhrebene.

Von den sphärischen Dreiecken, welche durch diese Kreisbogen entstehen, betrachten wir zuerst das Dreieck rbm. In ihm hat man

$$br = 90^\circ - n, \quad brm = 90^\circ - k, \quad rbm = 90^\circ.$$

Sey, wie zuvor, $bm = \alpha$ und überdieß $mr = \beta$ und $bmr = \gamma$, so findet man die Größe α, β und γ durch folgende Gleichungen:

$$tang.\ \alpha = cos.\ n\ cotang.\ k$$

$$tang.\ \beta = \frac{cotang.\ n}{sin.\ k}$$

$$cos.\ \gamma = sin.\ n\ cos.\ k.$$

Ueberdieß hat man

$$sin.\ \beta\ sin.\ \gamma = cos.\ n \text{ und}$$

$$cos.\ \beta\ sin.\ \gamma = sin.\ n\ sin.\ k.$$

In dem nächstfolgenden Dreiecke a c m aber ist $mc = f$, $ac = g$ und $mca = 90°$. Da ferner der Stift P A in der Ebene des Meridians liegen und der Weltaxe parallel seyn muß, so hat man, wenn φ die Polhöhe des Ortes bezeichnet, $APR = 90° - \varphi$, also auch $ar = 90° - \varphi$, und da $mr = \beta$ war, die Seite $am = 90° - (\varphi + \beta)$. Setzt man endlich noch den Winkel $cam = h$, so hat man

$$tang. f = cotang. (\varphi + \beta) \; cos. \gamma$$
$$sin. g = cos. (\varphi + \beta) \; sin. \gamma \text{ und}$$
$$tang. h = \frac{cotang. \gamma}{sin. (\varphi + \beta)}.$$

Diese Ausdrücke geben die Größen f, g und h durch die bekannten φ, β und γ. Will man aber jene Größen unmittelbar durch die gegebenen Größen n, k und φ ausdrücken, so wird man, wenn man β und γ durch die vorhergehenden Gleichungen eliminirt, erhalten

$$sin. g = sin. n \; cos. \varphi \; sin. k - cos. n \; sin. \varphi$$
$$tang. f = \frac{(sin. n \; cos. \varphi \; sin. k - cos. n \; sin. \varphi) \; cos. k}{sin. \varphi \; sin. k + cos. \varphi \; cotang. n}$$
$$tang. h = \frac{sin. n \; cos. k}{sin. n \; sin. \varphi \; sin. k + cos. n \; cos. \varphi}.$$

Diese Gleichungen setzen uns also in den Stand, den Stiel P A in der gehörigen, der Weltaxe parallelen Lage, an der Uhrebene zu befestigen, und es ist daher nur noch übrig, nun auch die Schattenlinien dieses Stieles für die einzelnen Stunden auf der Uhrebene zu verzeichnen.

Ist P S die Schattenlinie für den Stundenwinkel s, und nennt man ψ ihren Winkel S P M mit der Mittagslinie P M, so hat man in dem sphärischen Dreiecke m a s den Winkel

$$mas = s, \quad ams = \gamma,$$

und die Seite

$$am = 90° - (\varphi + \beta) \text{ und } ms = \psi,$$

also ist

$$tang. \psi = \frac{cos. (\varphi + \beta)}{sin. \gamma \; cotang. s + sin. (\varphi + \beta) \; cos. \gamma},$$

wodurch also die Schattenlinie PS für jeden Stundenwinkel s bestimmt ist.

Will man diese Schattenlinien nicht, wie zuvor, durch ihre Neigung gegen die Mittagslinie PM der Uhr, sondern durch ihren Winkel SPC = w mit der Substilarlinie bestimmen, so hat man in dem sphärischen Dreiecke acs

$$ac = g, \quad cas = s - h, \quad cs = w \text{ und } acs = 90°,$$

also auch

$$tang.\, w = sin.\, g\; tang.\, (s - h),$$

oder auch, wenn man in der Gleichung

$$tang.\, w = \frac{sin.\, g\, (tang.\, s - tang.\, h)}{1 + tang.\, s\; tang.\, h}$$

die obigen Gleichungen

$$sin.\, g = cos.\, (\varphi + \beta)\, sin.\, \gamma \text{ und } tang.\, h = \frac{cotang.\, \gamma}{sin.\, (\varphi + \beta)}$$

substituirt,

$$tang.\, w = \frac{cos.\, (\varphi + \beta)\, [sin.\, (\varphi + \beta)\, sin.\, \gamma - cos.\, \gamma\; cotang.\, s]}{sin.\, (\varphi + \beta)\; cotang.\, s + cotang.\, \gamma}.$$

Will man diese beiden Ausdrücke von $tang.\, \psi$ und $tang.\, w$ wieder nur durch n, k und φ ausdrücken, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$sin.\, y = sin.\, n\; sin.\, \varphi\; sin.\, k + cos.\, n\; cos.\, \varphi \text{ und}$$
$$sin.\, g = sin.\, n\; cos.\, \varphi\; sin.\, k - cos.\, n\; sin.\, \varphi \text{ setzt,}$$

$$tang.\, \psi = \frac{sin.\, g}{(cos.^2 n + sin.^2 n\; sin.^2 k)\; cotg.\, s + sin.\, n\; cos.\, k\; sin.\, y}$$

und

$$tang.\, w = \frac{sin.\, g\; (sin.\, y\; tang.\, s - sin.\, n\; cos.\, k)}{sin.\, y + sin.\, n\; cos.\, k\; tang.\, s},$$

wo ψ der Winkel der Schattenlinie mit der Mittagslinie der Uhrebene und w mit der Substilarlinie ist.

I. Sucht man noch den Winkel θ = CPB der Substilarlinie mit der Basis der Uhrebene, so ist

$$\theta = f + \alpha \text{ und daher}$$

$$tang.\, \theta = \frac{tang.\, f + tang.\, \alpha}{1 - tang.\, f\; tang.\, \alpha}, \text{ oder}$$

$$tang.\, \theta = \frac{cos.\, \varphi\; cos.\, k\; (cos.^2 n + sin.^2 n\; sin.^2 k)}{sin.\, k\; sin.\, y - sin.\, n\; cos.\, n\; sin.\, g\; cos.^2 k}.$$

II. Nehmen wir alles Vorhergehende zusammen, so erhält man für die Auflösung unserer Aufgabe folgende Ausdrücke:

Nachdem man die Neigung n der Uhrebene gegen den Horizont und ihre Abweichung k von der Mittagslinie DM bestimmt hat, ziehe man von dem Punkte P, in welchem der Stiel befestiget werden soll, eine senkrechte Linie PB, die Basis, auf die Durchschnittslinie BS der Uhrebene mit dem Horizonte. Dann suche man die Winkel

θ = BPC der Basis mit der Substilarlinie,
g = CPA der Substilarlinie mit dem Stiele und
w = CPS der Substilarlinie mit der Schattenlinie,

durch folgende Gleichungen:

Es sey

$$tang.\, x = sin.\, k\ tang.\, n$$

$$sin.\, y = \frac{cos.\, n\ cos.\, (x - \varphi)}{cos.\, x}$$

so ist

$$sin.\, g = \frac{cos.\, n\ sin.\, (x - \varphi)}{cos.\, x}$$

$$tang.\, \theta = \frac{cos.\, \varphi\ cos.\, k\ (cos.^2 n + sin.^2 n\ sin.^2 k)}{sin.\, k\ sin.\, y - sin.\, n\ cos.\, n\ sin.\, g\ cos.^2 k}$$

$$tang.\, w = \frac{sin.\, g\ (sin.\, y\ tang.\, s - sin.\, n\ cos.\, k)}{sin.\, y + sin.\, n\ cos.\, k\ tang.\, s)}.$$

§. 8.

Um aus diesem allgemeinen Ausdrucke die vorhergehenden und andere besondere Fälle abzuleiten, werden wir nur den Größen n und k die jedem Falle entsprechenden Werthe geben.

Man bemerke zuvor, daß die Substilarlinie

mit der	Schattenlinie	den Winkel	w bildet,
»	»	Basis	»	$\theta = f + \alpha$
»	»	Mittagslinie	»	f
»	dem	Stiele	»	g

und daß die Mittagslinie
mit der Schattenlinie den Winkel . . . . $\psi = w + f$
» » Basis » . . . α
» » auf dem Horizonte vertikalen Linie PR β bildet.

Endlich ist γ die Neigung der Uhrebene gegen die Ebene des Meridians und h die Neigung der auf der Uhrebene senkrechten, den Stiel tragenden Ebene, gegen die Ebene des Meridians.

I. Horizontaluhren.

Für sie ist $n = o$,
also auch $\alpha = 90^\circ - k$. Zieht man daher in der horizontalen Ebene die Linie BS senkrecht auf die horizontale Mittagslinie DM, so ist $k = 90^\circ$ und daher $\alpha = o$. Ferner ist, wie die Ausdrücke des vorhergehenden Paragraphs geben, wenn man in ihnen $n = \alpha = o$ setzt,
$\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ und $f = h = o$, und $\sin. g = -\sin. \varphi$.

Man hat daher

$$\tan g.\ w = -\sin.\ \varphi \tan g.\ s$$

und $\psi = w$, wie S. 8.

II. Schiefe Vertikaluhren.

Für sie ist $n = 90^\circ$ und k unbestimmt.

Man hat daher zur Bestimmung der Winkel g, θ und w

$$\sin.\ g = \cos.\ \varphi\ \sin.\ k$$

$$\tan g.\ \theta = \operatorname{cotang}.\ \varphi\ \cos.\ k$$

$$\tan g.\ w = \frac{\cos.\ \varphi\ \sin.\ k\ (\sin.\ \varphi\ \sin.\ k\ \tan g.\ s - \cos.\ k)}{\sin.\ \varphi\ \sin.\ k + \cos.\ k\ \tan g.\ s},$$

wie oben S. 12.

Für diese Uhren ist also $\alpha = o$ oder die Basis PB fällt mit der Mittagslinie zusammen. Auch ist $\beta = o$, $\gamma = k$ und $f = \theta$. Ferner hat man

$$\tan g.\ h = \frac{\operatorname{cotang}.\ k}{\sin.\ \varphi} \text{ und}$$

$$\tan g.\ \psi = \frac{\cos.\ \varphi}{\sin.\ k\ \operatorname{cotang}.\ s + \sin.\ \varphi\ \cos.\ k},$$ wie oben S. 13.

III. Vertikale Mittagsuhren.

Für sie ist $n = 90°$ und $k = 90°$,
also auch $g = 90° - \varphi$
$\theta = o$ und
$tang.\ w = cos.\ \varphi\ tang.\ s$, wie oben S. 9.
Überdieß hat man
$\alpha = \beta = f = h = o,\ \gamma = 90°$ und $\psi = w$.

IV. Vertikale Morgen- und Abenduhren.

Für sie ist $n = 90°$ und $k = o$, oder $k = 180°$,
also auch $g = o$
$\theta = 90° - \varphi$ und
$tang.\ w = o$,
oder die Schattenlinien sind mit der Substilarlinie parallel, wie oben S. 14. Überdieß hat man für diese Uhren
$\alpha = \beta = \gamma = o,\ f = 90° - \varphi,\ h = 90°$ und $\psi = 90° - \varphi$.

V. Geneigte Mittagsuhren.

Für sie ist $k = 90°$ und n unbestimmt,
also auch $g = n - \varphi$
$\theta = o$ und
$tang.\ w = sin.\ (n - \varphi)\ tang.\ s$.
Überdieß hat man
$\alpha = f = h = o,\ \beta = 90° - n,\ \gamma = 90°,\ g = n - \varphi$ und
$\psi = w$.

VI. Geneigte Morgen- und Abenduhren.

Für sie ist $k = o$ und n unbestimmt,
also auch

$$sin.\ g = -\ cos.\ n\ sin.\ \varphi$$

$$tang.\ \theta = \frac{cotang\ \varphi}{sin.\ n}$$

$$tang.\ w = \frac{(sin.\ n - cos.\ n\ cos.\ \varphi\ tang.\ s)\ cos.\ n\ sin.\ \varphi}{sin.\ n\ tang.\ s + cos.\ n\ cos.\ \varphi}.$$

Für diese Uhren hat man ferner

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ - n \text{ und}$$

$$tang.\, f = -\, tang.\, \varphi \; sin.\, n$$

$$sin.\, g = -\, sin.\, \varphi \; cos.\, n$$

$$tang.\, h = \frac{tang.\, n}{cos.\, \varphi} \text{ und endlich}$$

$$tang.\, \psi = \frac{-\, sin.\, \varphi}{cos.\, n \; cotang.\, s + sin.\, n \; cos.\, \varphi}.$$

VII. Aequinoktialuhren.

Für sie ist $n = 90^\circ + \varphi$ und $k = 90$, also auch $g = 90^\circ$, $\theta = 0$ und $w = s$, wie oben S. 5 n. 8. Überdieß hat man

$$\alpha = f = h = 0, \quad \beta = 360^\circ - \varphi, \quad \gamma = 90^\circ \text{ und } \psi = w.$$

VIII. Polaruhren.

Da die Ebene dieser Uhren senkrecht auf der Ebene des Meridians stehen, und durch den Pol des Aequators gehen soll, so ist für sie $n = \varphi$ und $k = 90^\circ$, also auch

$$g = 0, \quad \theta = 0 \text{ und } tang.\, w = 0,$$

oder die Schattenlinien dieser Uhr sind mit der Substilarlinie parallel. Überdieß hat man für diese Uhren

$$\alpha = f = g = h = 0, \quad \beta = 90^\circ - \varphi, \quad \gamma = 90^\circ, \text{ und}$$

$$\psi = w = 0.$$

§. 9.

Bisher haben wir nur die Lage der Schattenlinien der Uhr gegen irgend eine bekannte, fixe Linie der Uhrebene betrachtet. Gehen wir nun zur Bestimmung der Größe oder der Länge dieser Schattenlinien über. Ohne uns aber, wie zuvor, allmählig von den einfachern Uhren zu den mehr zusammengesetzten zu erheben, betrachten wir sofort die allgemeinste der bisher untersuchten Uhren, deren Ebene nämlich gegen den Horizont unter dem Winkel n geneigt ist, und

deren Durchschnitt BS in dem Horizonte mit der Mittagslinie DM den Winkel DMS = k bildet.

Sey (Fig. 3) PA′ = r die gegebene Länge des Stieles und PS′ = ϱ die für den Stundenwinkel s zu suchende Länge des Schattens. Die Linie S′A′, über A′ verlängert, geht durch den Mittelpunkt der Sonne, und diese Linie beschreibt während der täglichen Bewegung der Sonne um die Weltaxe PA einen Kegel, dessen Spitze in dem Endpunkte A′ des Stieles und dessen Axe der Stiel PA selbst ist. So wie aber die Schattenlinien PS die Durchschnitte der Uhrebene mit den Ebenen APS der Stundenkreise sind, so sind auch die Punkte S′ oder die Endpunkte des Schattens diejenigen Punkte der Schattenlinien PS, in welchen diese Schattenlinien von der Oberfläche jenes Kegels getroffen werden, so daß also die Endpunkte S′ des Schattens diejenigen Punkte sind, in welchen sich die Uhrebene, die Ebene der Stundenkreise und die Oberfläche des Kegels, alle drei zugleich, schneiden.

Da die Linie A′S′ nach der Sonne gerichtet ist, und da eine durch den Punkt A′ des Stiels auf den Stiel senkrecht gelegte Ebene den Aequator bezeichnet, so ist in dem Dreiecke PA′S′ der Winkel PA′S′ = 90° + δ, wo δ die Deklination der Sonne bezeichnet, und wo für südliche Deklinationen δ negativ genommen wird. Nennt man ferner den Winkel A′PS′ = u, so hat man auch

$$A'S'P = 90^\circ - (\delta + u),$$

und daher

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\cos.\delta}{\cos.(\delta + u)} = \frac{1}{\cos.u - \operatorname{tang}.\delta \sin.u}.$$

Das Verhältniß der Größen ϱ und r wird daher bekannt seyn, wenn der Winkel u gegeben ist.

Um diesen Winkel u zu finden, hat man in dem sphärischen Dreiecke sam die Seiten

as = u, am = 90° — ($\varphi + \beta$), sm = w + f oder sm = ψ und den Winkel ams = γ,

also ist

$$\sin. u = \frac{\sin.\gamma \sin.\psi}{\sin. s} \text{ und}$$

$$\cos. u = \sin.\psi \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma + \cos.\psi \sin.(\varphi+\beta).$$

Substituirt man diese Werthe von $\sin. u$ und $\cos. u$ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$\frac{r}{\rho} = \sin.\psi \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma$$

$$+ \cos.\psi \sin.(\varphi+\beta) - \text{tang.}\,\delta.\frac{\sin.\gamma \sin.\psi}{\sin. s}.$$

Allein dasselbe Dreieck gibt auch, da mas = s ist,

$$\text{cotang. } s = \frac{\text{cotang.}\psi \cos.(\varphi+\beta) - \sin.(\varphi+\beta) \cos.\gamma}{\sin.\gamma},$$

und daher

$$\frac{1}{\sin. s} = \sqrt{1+\text{cotang.}^2 s} =$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{\text{cotang.}\psi \cos.(\varphi+\beta) - \sin.(\varphi+\beta) \cos.\gamma}{\sin.\gamma}\right)^2}$$

oder wenn man

$$x = \cos.\psi \cos.(\varphi+\beta) - \sin.\psi \sin.(\varphi+\beta) \cos.\gamma$$

setzt,

$$\frac{\sin.\gamma \sin.\psi}{\sin. s} = \sqrt{\sin.^2\psi \sin.^2\gamma + x^2},$$

so daß man daher hat

$$\frac{r}{\rho} = \sin.\psi \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma + \cos.\psi \sin.(\varphi+\beta)$$

$$\mp \text{tang.}\,\delta . \sqrt{\sin.^2\psi \sin.^2\gamma + x^2}.$$

Dieser Ausdruck für ϱ enthält bloß die veränderliche Größe ψ = MPS oder den Winkel der Schattenlinie mit der Mittagslinie der Uhrebene, wo nach dem Vorhergehenden ist

$$\text{tang.}\psi = \frac{\cos.(\varphi+\beta)}{\sin.\gamma \text{ cotang. } s + \sin.(\varphi+\beta) \cos.\gamma}.$$

Für vertikale Uhrebenen ist, nach S. 20,

$\beta = 0$ und $\gamma = k$.

I. Setzt man in diesem Ausdrucke von $\frac{r}{\rho}$ für den Schattenwinkel ψ irgend einen bestimmten Werth, und läßt die Deklination δ der Sonne sich ändern, so erhält man diejenigen Punkte einer bestimmten Schattenlinie PS, wo im Laufe des ganzen Jahres an jedem Tage, für die angenommene Stunde, der Schatten in dieser Linie PS endet. Für den Augenblick des wahren Mittags z. B. hat man $s = o$, also auch $\psi = o$, und daher für die Länge ρ des mittägigen Schattens

$$\frac{r}{\rho} = sin. (\varphi + \beta) \mp tang. \delta \; cos. (\varphi + \beta) \text{ oder}$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{cos \; \delta}{sin. (\varphi + \beta \mp \delta)}.$$

Nimmt man aber im Gegentheile die Deklination δ als constant, und ψ als veränderlich an, so findet man alle Endpunkte S′ des Schattens PS′ für den Lauf des ganzen Tages, an welchem die Sonne jene vorausgesetzte bestimmte Deklination δ hat, d. h. man findet die krumme Linie, welche der Endpunkt des Schattens jeden Tag auf der Uhrebene beschreibt. Da diese Punkte, wie bereits bemerkt wurde, durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene, mit der Uhrebene, entstehen, so werden diese krummen Linien Kegelschnitte oder Linien der zweiten Ordnung seyn. Da ferner eine gerade Linie PS, welche die Oberfläche eines Kegels in dem Punkte S′ schneidet, diese Oberfläche noch in einem zweiten Punkte schneiden muß, so wird die Größe ρ für jedes ψ einen doppelten Werth haben, der auch durch das doppelte Zeichen der Wurzelgröße in dem vorhergehenden Ausdrucke von ρ gegeben wird. Man wird aber im Allgemeinen immer den kleineren, der Uhrebene nächsten Werth von ρ, und daher in dem obigen Ausdrucke von ρ das untere Zeichen der Wurzelgröße nehmen, um den wahren Endpunkt S′ des Schattens zu erhalten, so daß man daher hat

$$\frac{r}{\rho} = \sin.\psi\ \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma + \cos.\psi\ \sin.(\varphi+\beta)$$
$$+ \mathrm{tang}.\delta\ .\ \sqrt{\sin.^2\psi\ \sin.^2\gamma + x^2}.$$

§. 10.

Sey S′M′ senkrecht auf die Mittagslinie PM, und PM′ $= x$, M′S′ $= y$, so hat man $x = \varrho\ \cos.\psi$, $y = \varrho\ \sin.\psi$ und $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Substituirt man diese Werthe von $\sin.\psi$ und $\cos.\psi$ in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{r}{\rho}$, so erhält man

$$r = y\ \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma + x\ \sin.(\varphi+\beta)$$
$$+ tg.\delta\ .\ \sqrt{y^2 \sin.^2\gamma + [x \cos.(\varphi+\beta) - y \sin.(\varphi+\beta) \cos.\gamma]^2}.$$

Wenn man diesen Ausdruck quadrirt und ordnet, so hat man die Gleichung

$$y^2 [\cos.(\varphi+\beta+\delta)\ \cos.(\varphi+\beta-\delta)\ \cos.^2\gamma - \sin.^2\delta \sin.^2\gamma]$$
$$+ x^2 \sin.(\varphi+\beta+\delta)\ \sin.(\varphi+\beta-\delta)$$
$$+ 2xy\ \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma + r^2\ \cos.^2\delta$$
$$- 2ry\ \cos.(\varphi+\beta) \cos.^2\delta \cos.\gamma - 2rx \sin.(\varphi+\beta) \cos.^2\delta = 0,$$

welcher Gleichung man auch folgende Gestalt geben kann

$$y^2\ [\cos.^2(\varphi+\beta)\ \cos.^2\gamma - \sin.^2\delta]$$
$$+ x^2\ [\sin.^2(\varphi+\beta) - \sin.^2\delta]$$
$$+ 2yx \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma$$
$$- 2r\ \cos.^2\delta\ [y\ \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma + x\ \sin.(\varphi+\beta)]$$
$$+ r^2\ \cos.^2\delta = 0,$$

welches die Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung ist. Diese Gleichung gehört für eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn $\cos.^2(\varphi+\beta)\ \sin.^2\gamma$ größer oder kleiner, oder so groß als $\cos.^2\delta$ ist.

I. Für horizontale Uhren hat man z. B.

$$n = 0 \text{ und } \beta = \gamma = 90^\circ,$$

also $\sin.(\varphi+\beta) = \cos.\varphi$ und $\cos.(\varphi+\beta) = -\sin.\varphi$.

Für diese Uhren wird also die Länge ρ des Schattens durch die Gleichung gegeben

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi\,\cos.\varphi + tang.\delta \cdot \sqrt{\sin.^2\psi + \cos.^2\psi\,\sin.^2\varphi}}.$$

Es wird daher das Schattenende eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel beschreiben, wenn die Größe N positiv, negativ oder gleich Null ist. Es ist aber

$$N = \sin.^2\varphi\,\sin.^2\delta - \sin.^2\delta\,\cos.^2\delta$$
$$= \sin.^2\delta\,[\cos.^2(90^\circ - \varphi) - \cos.^2\delta]$$

und daher N positiv, wenn $90^\circ - \varphi < \delta$ oder $\varphi + \delta > 90^\circ$
negativ, » $90^\circ - \varphi > \delta$ oder $\varphi + \delta < 90^\circ$
Null, » $90^\circ - \varphi = \delta$ oder $\varphi + \delta = 90^\circ$ ist,

d, h. die krumme Linie ist
eine Ellipse, wenn $\varphi + \delta > 90^\circ$,
» Hyperbel, » $\varphi + \delta < 90^\circ$,
» Parabel » $\varphi + \delta = 90^\circ$ ist.

Für den Kreis endlich hat man

$$tang.\,(\varphi + \beta) = 0, \text{ oder } cotang.\,\varphi = 0,$$

das heißt $\varphi = 90^\circ$

für die Bewohner der Pole, wo die Horizontaluhr zu einer Äquinoktialuhr wird, in welcher letzteren die von dem Schattenende beschriebene Linie immer ein Kreis ist. Die Ellipse hat also nur für die kalten Zonen, und auch da nur während einer kurzen Zeit Statt. Die Parabel wird ebenfalls nur in der kalten Zone von dem Endpunkte des Schattens beschrieben, und zwar nur an den zwei Tagen des Jahres für jeden Parallelkreis, wenn die Sonne eben anfängt oder aufhört, über dem Horizonte des Ortes zu bleiben. Für alle übrigen Zeiten und Orte der Erde ist jene krumme Linie eine Hyperbel.

II. Für vertikale Mittagsuhren hat man $\beta = 0$ und $\gamma = 90^\circ$, also

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi\,\sin.\varphi - tang.\delta\,\sqrt{\sin.^2\psi + \cos.^2\psi\,\cos.^2\varphi}}.$$

Ich wähle hier das obere oder das negative Zeichen der Wurzelgröße, weil bei diesen Uhren der mittägige Schatten ϱ für $\varphi = \delta$ unendlich groß werden muß, was in der Gleichung (S. 25)

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\cos.\,\delta}{\sin.\,(\varphi + \beta \mp \delta)}$$

für $\beta = 0$ nur bey dem oberen Zeichen von δ seyn kann. Hier ist demnach $N = \sin.^2\,\delta\,(\cos.^2\,\varphi - \cos.^2\,\delta)$ also die krumme Linie

eine Ellipse, wenn N positiv, oder wenn $\varphi < \delta$,
» Hyperbel, » » negativ, » » $\varphi > \delta$,
» Parabel, » » null, » » $\varphi = \delta$.

Für den Kreis endlich hat man $\sin.\,\varphi = \cos.\,\varphi\,\cos.\,\gamma$ oder $\varphi = 0$. In der That steht für die Bewohner des Aequators der Stiel horizontal. Setzt man in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung der Curve

$$\gamma = 90^0 \text{ und } \beta = \varphi = 0,$$

so erhält man

$$x^2 + y^2 = r^2\,\cotang.^2\,\delta$$

für die Gleichung dieses Kreises, dessen Halbmesser daher gleich $r\,\cotang.\,\delta$ ist. Substituirt man in dem ersten Ausdrucke für $\frac{\varrho}{r}$ (erste Gleichung der Nro. II.) den Werth von ψ aus $\tang.\,\psi = \tang.\,s\,\cos.\,\varphi$, so findet man für vertikale Mittagsuhren

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\sqrt{\cos.^2\,\varphi + \sin.^2\,\varphi\,\cos.^2\,s}}{\sin.\,\varphi\,\cos.\,s - \tang.\,\delta\,\cos.\,\varphi},$$

ein Ausdruck von ϱ, der bloß die veränderliche Größe s enthält.

III. Bemerken wir noch einen andern Ausdruck für ϱ, der unmittelbar von dem Stundenwinkel s der Sonne abhängt. In dem Dreiecke acs hat man nämlich

$$\tang.\,u = \frac{\tang.\,g}{\cos.\,(s - h)},$$

und wenn man diesen Werth von u in der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{cos. u - tang. \delta \; sin. u}$$

substituirt, so erhält man

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{tang.^2 g + cos.^2 (s - h)}}{cos. (s - h) - tang. \delta \; . \; tang. g}$$

Für vertikale Uhrebenen hat man (S. 20)

$$sin. g = cos. \varphi \; sin. k \text{ und}$$

$$tang. h = \frac{cotang. k}{sin. \varphi},$$

also auch, wenn man diese Werthe von g und h substituirt, und s = o setzt, für den mittägigen Schatten jeder Vertikaluhr

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{sin.^2 \varphi + cos.^2 \varphi \; cos.^2 k}}{sin. \varphi \sqrt{1 - cos.^2 \varphi \; sin.^2 k} - tg \, \delta \; cos \, \varphi \, . \sqrt{sin.^2 \varphi \; sin.^2 k + cos.^2 k}}$$

oder da

$$sin.^2 \varphi + cos.^2 \varphi \; cos.^2 k = 1 - cos.^2 \varphi \; sin.^2 k$$
$$= sin.^2 \varphi \; sin.^2 k + cos.^2 k \text{ ist,}$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{sin. \varphi - tang. \delta \; cos. \varphi} = \frac{cos. \delta}{sin. (\varphi - \delta)},$$

wie wir auch schon S. 25 aus dem ersten Ausdrucke von $\frac{\rho}{r}$ gefunden haben, so daß also dieser Ausdruck des mittägigen Schattens nicht nur für die Mittagsuhren, sondern für alle vertikalen Uhren gehört.

IV. Stellen wir auch hier, wie in §. 8, die Ausdrücke für die einfachern Uhren zusammen, so hat man

für die Horizontaluhren

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{cos. \psi \; cos. \varphi + tang. \delta \sqrt{1 - cos.^2 \psi \; cos.^2 \varphi}}$$

und die tägliche Curve des Schattenendes ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn $\varphi + \delta$ größer, kleiner oder so groß als 90° ist. Für den Kreis ist $\varphi = 90°$.

Für vertikale Mittagsuhren.

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi \sin.\varphi + \tang.\delta . \sqrt{1 - \cos.^2\psi \sin.^2\varphi}}$$

und die Curve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn δ größer, kleiner oder so groß als φ ist. Für den Kreis ist $\varphi = 0$.

Für geneigte Mittagsuhren.

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi \cos.(n-\varphi) + \tang.\delta \sqrt{1 - \cos.^2\psi \cos.^2(n-\varphi)}}$$

und die Curve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn δ größer, kleiner oder so groß als $90^\circ - n + \varphi$ ist. Für den Kreis ist $n - \varphi = 90^\circ$.

Für Äquinoktialuhren

ist $\beta = 360^\circ - \varphi$, $\gamma = 90^\circ$ und $\psi = s$,

also $\rho = r \cotang.\delta$

und die Curve immer ein Kreis.

Für vertikale Morgen- und Abenduhren, so wie für Polaruhren endlich ist

$$\rho = r.$$

§. 11.

Dieser Ausdruck für die Länge des mittägigen Schattens der Vertikaluhren gibt ein einfaches Mittel, durch die Sonnenuhren auch die wahre Zeit des mittleren Mittages auszudrücken. Zu diesem Zwecke wird man für mehrere Tage des Jahres, z. B. von 10 zu 10 Tagen die Zeitgleichung s und die Deklination δ der Sonne für den Mittag dieser Tage aus einer Ephemeride nehmen. Der Werth von s gibt den Winkel ψ der Schattenlinie mit der Mittagslinie der Uhrebene für die Zeit des mittleren Mittags durch die Gleichung (S. 20)

$$\tang.\psi = \frac{\cos.\varphi}{\sin.k \cotang.s + \sin.\varphi \cos.k}.$$

Nimmt man dann in dieser Schattenlinie, von dem Fußpunkte P des Stieles an, die Größe

$$\varrho = \frac{r}{cos.\,\psi\; sin.\,\varphi - tang.\,\delta\, \sqrt{sin.^2\,\psi + cos.^2\,\psi\; cos^2\,\varphi}}.$$

wofür man annähernd setzen kann

$$\varrho = \frac{r\; cos.\,\delta}{sin.\,(\varphi - \delta)},$$

so hat man den Punkt dieser Schattenlinie, auf welchen an diesem Tage das Ende des Schattens zur Zeit des mittleren Mittags fällt. Wiederholt man diese Bestimmung für mehrere Tage, so kann man alle so erhaltenen Punkte durch eine krumme Linie verbinden, die einer gedehnten 8 ähnlich sieht. Man bezeichnet gewöhnlich die einzelnen Partien dieser Linien mit den Namen der Monate, in welchen zur Zeit des mittleren Mittags das Ende des Schattens in diese krumme Linie fällt.

§. 12.

Die bisher gegebenen Auflösungen sind, wie man sieht, ganz allgemein, vorausgesetzt, daß die Fläche, auf welcher die Uhr verzeichnet werden soll, eine ebene Fläche ist, deren Lage gegen den Horizont und gegen den Meridian, welche immer seyn kann. Wenn man aber für die Uhrebenen auch krumme Flächen annimmt, so haben wir wohl oben S. 9 ein praktisches Verfahren angezeigt, wodurch man auf jeder dieser Flächen eine Sonnenuhr mit hinlänglicher Genauigkeit für die Anwendung verzeichnen kann; aber die strenge geometrische oder analytische Auflösung dieser Aufgabe läßt sich auf dem bisher versuchten Wege nicht, oder doch nicht ohne große Umständlichkeit finden.

Wir wollen daher die Lage der bisher durch sphärische Trigonometrie betrachteten Ebenen durch Gleichungen zwischen drei unter einander senkrechten Coordinaten x, y, z ausdrücken.

Nimmt man x in der Mittagslinie des Horizontes und y darauf senkrecht und ebenfalls im Horizonte, so daß daher die Ordinate z eine gegen den Horizont vertikale Richtung hat, so erhält man für die Gleichung der Uhrebene

$$z = Ax + By,$$

wenn sie, wie vorausgesetzt wird, durch den Anfang der Coordinaten geht, der hier der Fußpunkt des Stieles ist. Ist n die Neigung der Uhrebene gegen den Horizont und k der Winkel des Durchschnitts der Uhrebene und des Horizonts mit der horizontalen Mittagslinie, so ist

$$A = tang.\, n \; sin.\, k \text{ und } B = tang.\, n \; cos.\, k.$$

Suchen wir nun eben so die Gleichung der Stundenebene durch dieselben Coordinaten x, y, z auszudrücken. Legt man die Axe der X in den Durchschnitt des Meridians mit dem Aequator, und nimmt X, Y in der Ebene des Aequators und Z darauf senkrecht, so ist die Gleichung der Stundenebene, da sie immer senkrecht auf dem Aequator steht,

$$Y = X \; tang.\, s,$$

wenn wieder s den Stundenwinkel bezeichnet.

Diese Coordinaten hängen aber von den oben angenommenen so ab, daß man hat

$$X = x \; sin.\, \varphi - z \; cos.\, \varphi.$$
$$Y = y$$
$$Z = z \; sin.\, \varphi + x \; cos.\, \varphi.$$

Substituirt man diese Ausdrücke von X und Y in der vorhergehenden Gleichung $Y = X \; tang.\, s$, so erhält man für die gesuchte Gleichung der Stundenebene

$$y = (x \; sin.\, \varphi - z \; cos.\, \varphi) \; tang.\, s, \text{ oder auch}$$

$$z = x \; tang.\, \varphi - \frac{y \; cotang.\, s}{cos.\, \varphi}.$$

Diese beiden Gleichungen, der Uhrebene und der Schattenebene, zusammen genommen, geben den Durchschnitt dieser beiden Ebenen, d. h. sie geben die Schattenlinie in der Uhrebene. Verbindet man aber die Gleichung der Uhrebene

mit der Gleichung der Meridianebene selbst, welche letzte Gleichung $y = o$ ist, so erhält man den Durchschnitt des Meridians mit der Uhrebene, d. h. die Schattenlinie des Mittags oder die Mittagslinie der Uhrebene.

Wir haben daher für die Gleichungen der Mittagslinie der Uhrebene

$$\begin{cases} y = o \text{ und} \\ z = x \, tang. n \, sin. k + y \, tang. n \, cos. k, \end{cases}$$

und für die Gleichungen jeder Schattenlinie, die zu dem Stundenwinkel s gehört,

$$\begin{cases} z = x \, tang. \varphi - \dfrac{y \, cotang. s}{cos. \varphi} \text{ und} \\ z = x \, tang. n \, sin. k + y \, tang. n \, cos. k. \end{cases}$$

Wir wollen nun wieder, wie zuvor, durch ψ den Winkel der Schattenlinie mit der Mittagslinie der Uhr bezeichnen, und den Werth dieses Winkels mit Hülfe der vier letzten Gleichungen suchen.

Sind $x = az$, $y = bz$ die Gleichungen einer, und $x = a'z$, $y = b'z$ die Gleichungen einer anderen geraden Linie, und nennt man ψ den Winkel dieser beiden Geraden, so ist bekanntlich

$$tang. \psi = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{1 + aa' + bb'}.$$

Wendet man diese Ausdrücke auf unsere beiden Linien an, so ist

$$a = \frac{1}{tang. n \, sin. k} \text{ und } a' = \frac{cos. k \, cos. \varphi + cotg. n \, cotg. s}{cos. k \, sin. \varphi + sin. k \, cotg. s}$$

$$b = o \qquad b' = \frac{cotg. n \, sin. \varphi - sin. k \, cos. \varphi}{cos. k \, sin. \varphi + sin. k \, cotg. s}.$$

Substituirt man diese Werthe von a, b, a′ und b′ in dem vorhergehenden Ausdrucke von $tang. \psi$, so erhält man

$$tang.^2\,\psi = \frac{(cos.\,k\ sin.\,\varphi - sin.\,k\ cos.\,k\ cos.\,\varphi\ tang.\,n)^2 + (sin.\,k\ cos.\,\varphi - cotang.\,n\ sin.\,\varphi)^2 \,.\, (1 + tg.^2\,n\ sin.^2\,k)}{[cos.\,k\ (sin.\,k\ tang.\,n\ sin.\,\varphi + cos.\,\varphi) + (sin.^2\,k\ tang.\,n + cotang.\,n)\ cotang.\,s]^2}$$

oder

$$tang.^2\,\psi = \frac{sin.^2\,k\,(1 + tang.^2\,n\ cos.^2\,\varphi) + (cotang.^2\,n + cos.^2\,k)\ sin.^2\,\varphi - 2\,\frac{sin.\,k\ sin.\,\varphi\ cos.\,\varphi}{sin.\,n\ cos.\,n}}{\left[cos.\,k\ (sin.\,k\ tang.\,n\ sin.\,\varphi + cos.\,\varphi) + \frac{(sin.^2\,k\ sin.^2\,n + cos.^2\,n)\ cotang.\,s}{sin.\,n\ cos.\,n}\right]^2}.$$

Multiplizirt man den Zähler und Nenner dieses Bruches durch $sin.^2\,n\ cos.^2\,n$, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$tang.\,\psi = \frac{sin.\,n\ cos.\,\varphi\ sin.\,k - cos.\,n\ sin.\,\varphi}{sin.\,n\ cos.\,k\ (sin.\,n\ sin.\,k\ sin.\,\varphi + cos.\,n\ cos.\,\varphi) + (cos.^2\,n + sin.^2\,n\ sin.^2\,k)\ cotang.\,s},$$

welchen Ausdruck wir auch oben (S. 8) gefunden haben.

§. 13.

Um diesen Gegenstand auf dem betretenen Wege weiter zu verfolgen, und die in der Zukunft nothwendigen Eliminationen zu vereinfachen, wird es zweckmäßig seyn, zu der vorzüglichsten der drei coordinirten, unter sich senkrechten Ebenen, nicht wie bisher den Horizont, sondern vielmehr den Aequator zu nehmen, auf welchem der Stiel aller Sonnenuhren senkrecht steht, und welcher daher als die Fundamentalebene dieser Uhren betrachtet werden muß.

Sey also x in der Durchschnittslinie des Aequators mit dem Meridian, x und y in der Ebene des Aequators, und z endlich auf diese Ebene senkrecht. Man suche die Gleichung einer Ebene zwischen diesen Coordinaten, unter der Voraussetzung, daß diese Ebene gegen den Horizont unter dem Winkel n geneigt sey, und daß ihr Durchschnitt in dem Horizonte mit der horizontalen Mittagslinie den Winkel k bilde.

Da diese Ebene, die Uhrebene, durch den Anfang der Coordinaten x.y.z geht, für welchen wir hier den Fußpunkt des Stieles, wo dieser die Uhrebene trifft, annehmen, so wird die Gleichung der Uhrebene die Form haben

$$z = Ax + By.$$

Ist aber ν die Neigung der Uhrebene gegen den Aequator, und $\varkappa$ die Abweichung derselben von dem Meridian, so hat man, wie oben,

$$A = \textit{tang.}\,\nu\ \textit{sin.}\,\varkappa \text{ und } B = -\textit{tang.}\,\nu\ \textit{cos.}\,\varkappa.$$

Es ist daher nur noch übrig, diese beiden Größen ν und $\varkappa$ durch n und k auszudrücken, welche letztere als die eigentlich gegebenen Größen zu betrachten sind.

Zu diesem Zwecke sey (Fig. 4) Z das Zenith, P der Pol des Aequators B A; ferner D H der Horizont, und Q C die Uhrebene. Dieses vorausgesetzt, hat man $CH = CZH = k$, $DCQ = n$, und $BA = BPA = \varkappa$, $ABQ = \nu$, so wie $AH = 90° - \varphi$, und $PA = PB = 90°$.

Das sphärische Dreieck QCH gibt, wenn der Winkel BQZ $=$ u, und QA $=$ w gesetzt wird,

$$\cos. u = \cos. k \sin. n$$

$$\tan g. QH. = -\sin. k \tan g. n$$

oder da $w = QH - (90^\circ - \varphi)$ ist,

$$\tan g. w = \frac{1 + \tan g. n \sin. k \tan g. \varphi}{\tan g. \varphi - \tan g. n \sin. k}.$$

Eben so ist in dem Dreiecke BQA

$$\sin. w \sin. u = \sin. \varkappa \sin. \nu \text{ und}$$

$$\cos. w = \frac{\cos. \nu}{\sin. u}.$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen gibt sofort

$$\tan g. \nu \sin. \varkappa = \tan g. w, \text{ das heißt}$$

$$A = \frac{\cos. \varphi + \tan g. n \sin. k \sin. \varphi}{\sin. \varphi - \tan g. n \sin. k \cos. \varphi}.$$

Weiter ist

$$\tan g. \nu \cos. \varkappa = \frac{\tan g. \nu \sin. \varkappa}{\tan g. \varkappa} = \frac{\tan g. w}{\sin. w \tan g. u} = \frac{\cos. w}{\tan g. u},$$

oder wenn man in dieser Gleichung den vorhergehenden Werth von $\tan g. w$ und $\tan g. u$ aus $\cos. u = \cos. k \sin. n$ einführt,

$$\tan g. \nu \cos. \varkappa = -\frac{\tan g. n \cos. k}{\sin. \varphi - \tan g. n \sin. k \cos. \varphi}, \text{ also auch}$$

$$B = \frac{\tan g. n \cos. k}{\sin. \varphi - \tan g. n \sin. k \cos. \varphi}.$$

Wir haben daher für die gesuchte Gleichung der Uhrebene zwischen unsern neuen Coordinaten,

$$z = \frac{x (\cos. \varphi \cos. n + \sin. \varphi \sin. n \sin. k)}{\sin. \varphi \cos. n - \cos. \varphi \sin. n \sin. k}$$
$$+ \frac{y \sin. n \cos. k}{\sin. \varphi \cos. n - \cos. \varphi \sin. n \sin. k} \ldots \text{(A)}$$

Uebrigens hätte man diesen Ausdruck einfacher aus folgender Betrachtung finden können. Wenn sich die Coordinaten x' y' z', wie in dem vorhergehenden Paragraph, auf den Horizont beziehen, so hat man für die Gleichung der Uhrebene

$$z' = x' \tan g. n \sin. k + y' \tan g. n \cos. k.$$

Allein diese Coordinaten $x' y' z'$ hängen von unseren neu eingeführten Coordinaten $x y z$, die sich auf den Aequator beziehen, so ab, daß man hat

$$x' = z \; cos. \varphi + x \; sin. \varphi$$
$$y' = y$$
$$z' = z \; sin. \varphi - x \; cos. \varphi.$$

Substituirt man diese Werthe von $x' y' z'$ in die vorige Gleichung, so erhält man sofort

$$z = \frac{x \; (cos. \varphi \; cos. n + sin. \varphi \; sin. n \; sin. k) + y \; sin. n \; cos. k}{sin. \varphi \; cos. n - cos. \varphi \; sin. n \; sin. k}$$

wie zuvor.

I. Setzt man in diesem Ausdrucke $n = 90°$, so erhält man die Gleichung der schiefen Vertikalebene

$$z = - x \; tang. \varphi - y \frac{cotang. k}{cos. \varphi}.$$

Für die vertikale Mittagsebene hat man $n = 90°$ und $k = 90°$, also ihre Gleichung

$$z = - x \; tang. \varphi.$$

Für den Horizont endlich wird man, nach §. 10, nur in der letzten Gleichung φ in $90° + \varphi$ verwandeln, wodurch man für die Gleichung des Horizonts erhält

$$z = + x \; cotang. \varphi.$$

II. Die Gleichung der Stundenebene aber ist, wie zuvor,

$$y = x \; tang. s.$$

Setzt man in dieser Gleichung $s = 0$ für den wahren Mittag, so erhält man die Gleichung der Ebene des Meridians, die also $y = 0$ ist.

§. 14.

Nachdem wir auf diese Weise die Gleichungen des Meridians, der Stundenebene und der Uhrebene zwischen unsern neuen Coordinaten erhalten haben, so hat man auch, wie zuvor, die Gleichungen der Mittagslinie sowohl, als auch

die der Schattenlinien. Die beiden Gleichungen der Mittagslinie in der Uhrebene werden nämlich seyn

$y = o$ und die Gleichung (A),

und die Gleichungen der Schattenlinien sind

$y = x\ tang.\ s$ und die Gleichung (A).

Nennen wir wieder ψ den Winkel, welchen die Schattenlinie für jeden gegebenen Stundenwinkel mit der Mittagslinie der Uhrebene bildet. Sind aber

$$\left.\begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array}\right\}$$

die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume, so wird der Winkel ψ, unter welchem sie sich schneiden, durch folgende Gleichung bestimmt,

$$cos.\ \psi = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\ .\ \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

Wendet man dieß auf unsere beiden Linien an, wo man hat

für die Mittagslinie	für die Schattenlinie
$y = o$	$y = x\ tang.\ s$
$z = Ax$	$z = Ax + By$

so erhält man $cos.\ \psi =$

$$\frac{1 + A^2 + AB\ tang.\ s}{\sqrt{(1 + A^2)^2 + (1 + A^2 + B^2 + A^2B^2)\ tg.^2 s + 2AB\ (1 + A^2)\ tg.\ s}}$$

oder einfacher

$$tang.\ \psi = \frac{tang.\ s\ .\ \sqrt{1 + A^2 + B^2}}{1 + A^2 + AB\ tang.\ s}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für A und B die in dem vorhergehenden Paragraph gefundenen allgemeinen Werthe, so erhält man nach einigen einfachen Reduktionen, wenn $sin.\ g = cos.\ \varphi\ sin.\ n\ sin.\ k - sin.\ \varphi\ cos.\ n$, und

$sin.\ y = sin.\ \varphi\ sin.\ n\ sin.\ k + cos.\ \varphi\ cos.\ n$ ist,

$$tang.\ \psi = \frac{sin.\ g}{sin.\ y\ sin.\ n\ cos.\ k + (cos.^2 n\ sin.^2 n\ sin.^2 k)\ cotang.\ s'}$$

dieselbe Gleichung, die wir schon oben S. 18 erhalten haben.

Derselbe Ausdruck gibt auch

$$cotang.\, s = \frac{sin.\, g\ cotang.\, \psi - sin.\, y\ sin.\, n\ cos.\, k}{1 - sin.^2 n\ cos.^2 k},$$

wodurch s aus ψ gefunden wird.

Wendet man zur Vereinfachung dieser Ausdrücke die S. 16 eingeführten Größen β und γ auch hier an, wo man hatte

$$tang.\, \beta = \frac{cotang.\, n}{sin.\, k}, \quad cos.\, \gamma = sin.\, n\ cos.\, k$$

$$sin.\, \beta\ sin.\, \gamma = cos.\, n, \quad cos.\, \beta\ sin.\, \gamma = sin.\, n\ sin.\, k,$$

so erhält man

$$cotang.\, \psi = \frac{(sin.\, \varphi\ cos.\, \beta\ sin.\, \gamma + cos.\, \varphi\ sin.\, \beta\ sin.\, \gamma)\ cos.\, \gamma}{cos.\, \varphi\ cos.\, \beta\ sin.\, \gamma - sin.\, \varphi\ sin.\, \beta\ sin.\, \gamma} + \frac{(1 - cos.^2 \gamma)\ cotang.\, s}{cos.\, \varphi\ cos.\, \beta\ sin.\, \gamma - sin.\, \varphi\ sin.\, \beta\ sin.\, \gamma}$$

oder

$$tang.\, \psi = \frac{cos.\, (\varphi + \beta)}{sin.\, (\varphi + \beta)\ cos.\, \gamma + sin.\, \gamma\ cotang.\, s},$$

wie wir auch schon S. 17 gefunden haben, und eben so

$$cotang.\, s = \frac{cos.\, (\varphi + \beta)\ cotang\ \psi - sin.\, (\varphi + \beta)\ cos.\, \gamma}{sin.\, \gamma}.$$

Substituirt man endlich auch dieselben Größen β und γ in den vorhergehenden Ausdrücken von A und B, so erhält man

$$A = -\, tang.\, (\varphi + \beta) \text{ und } B = -\, \frac{cotang.\, \gamma}{cos.\, (\varphi + \beta)}$$

so daß man für die allgemeine Gleichung der Uhrebene hat

$$z = -\, x\ tang.\, (\varphi + \beta) - \frac{y\ cotang.\, \gamma}{cos.\, (\varphi + \beta)}.$$

§. 15.

Wir haben bereits oben S. 23 bemerkt, daß die gerade Linie, welche den Endpunkt des Stieles mit der Sonne verbindet, während der täglichen Umdrehung der Sonne einen Kegel beschreibt, dessen Scheitel in diesem Endpunkte des Stiels, und dessen Axe der Stiel selbst ist. Der Winkel

aber, welchen die Seite dieses Kegels mit der Axe desselben macht, ist gleich $90° + \delta$.

Um die Gleichung der Oberfläche dieses Kegels durch unsere auf den Aequator sich beziehenden Coordinaten zu finden, bemerken wir, daß die Axe des Kegels senkrecht auf dem Aequator steht und denselben in einem Kreise schneidet. Betrachten wir den der Uhrebene zugewandten Theil dieses Kegels BCA′ (Fig. 15), wo $PA' = r$ die Länge des Stieles, P der Fußpunkt desselben in der Uhrebene und $Pp = z$ irgend ein Theil des Stieles ist. Legt man durch die Punkte P und p auf den Stiel senkrechte Ebenen, so schneiden diese die Oberfläche des Kegels in zwei Kreisen, von welchen die Halbmesser PB und pb sind. Da aber der Winkel PA′B $= 90° + \delta$ ist, so ist $PB = PA' \, cotang. \, \delta = r \, cotang. \, \delta$ und $pb = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Endlich ist

$$\frac{A'P}{pb} = \frac{PA'}{PB} \text{ oder}$$

$$\frac{r - z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = tang. \, \delta$$

und dieß ist die gesuchte Gleichung der Oberfläche des Kegels, welche während dem Laufe jedes Tages von der geraden Linie beschrieben wird, die den Endpunkt A′ des Stieles mit der Sonne verbindet.

Es ist bereits oben gesagt worden, daß der Endpunkt der Schattenlinie derjenige ist, in welchem diese Linie von der Oberfläche des Kegels getroffen wird. Dieser Punkt wird daher durch das Zusammenseyn der drei Gleichungen ausgedrückt werden, von welchen die erste dem Kegel und die beiden anderen der Schattenlinie gehören. Diese drei Gleichungen sind aber nach dem Vorhergehenden

$$(x^2 + y^2) \, tang.^2 \, \delta = (r - z)^2,$$
$$z = Ax + By \text{ und}$$
$$y = x \, tang. \, s,$$

wo man für die letzte, wenn man s durch die Winkel ψ ausdrücken will, nach dem Vorhergehenden auch die Gleichung

$$y = \frac{x\ \sin.\gamma}{\cos.(\varphi+\beta)\ \mathrm{cotang}.\psi - \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma}$$

nehmen kann. Aus diesen drei Gleichungen wird man durch Elimination die Werthe der Coordinaten x, y und z bestimmen, welche den Endpunkt des Schattens bezeichnen.

Die beiden letzten Gleichungen geben sofort

$$x = \frac{M z}{AM + B\ \sin.\gamma} \text{ und } y = \frac{z\ \sin.\gamma}{AM + B\ \sin.\gamma}.$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$M = \cos.(\varphi+\beta)\ \mathrm{cotang}.\psi - \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in der vorhergehenden dritten Gleichung, die für den Kegel gehört, so hat man

$$(z-r)^2 = z^2 . N,$$

wenn wieder

$$N = \frac{(M^2 + \sin.^2\gamma)\ \mathrm{tang}.^2\delta}{(AM + B\ \sin.\gamma)^2}$$

gesetzt wird.

Diese für z quadratische Gleichung gibt aber

$$\frac{z}{r} = \frac{1}{1 - \sqrt{N}}.$$

Substituirt man aber für A, B und M die oben (S. 36) gegebenen Werthe, so erhält man $-\sqrt{N} =$

$$\frac{\mathrm{tang}.\delta . \sqrt{[\cos.(\varphi+\beta)\ \mathrm{cotg}.\psi - \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma]^2 + \sin.^2\gamma}}{\sin.(\varphi+\beta)\ \mathrm{cotang}.\psi + \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma},$$

so daß man daher hat, wenn man der Kürze wegen annimmt

$$Q = \sin.(\varphi+\beta) + \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma\ \mathrm{tang}.\psi$$
$$+ \mathrm{tg}.\delta . \sqrt{[\cos.(\varphi+\beta) - \sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\ \mathrm{tg}.\psi]^2 + \sin.^2\gamma\ \mathrm{tg}.^2\psi}$$

$$\frac{z}{r} = \frac{\sin.(\varphi+\beta) + \cos.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma\ \mathrm{tang}.\psi}{Q}$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{\sin.\gamma\ \mathrm{tang}.\psi}{Q} \text{ und}$$

$$\frac{x}{r} = -\frac{[\cos.(\varphi+\beta) - \sin.(\varphi+\beta)\ \cos.\gamma\ \mathrm{tang}.\psi]}{Q}$$

und diese Werthe von x, y und z geben für jede Schattenlinie oder für jeden Werth von ψ den Endpunkt dieser Schattenlinie. Die Länge ϱ des Schattens, der zwischen diesem Endpunkte und zwischen dem Fußpunkte des Stieles oder dem Anfange der Coordinaten enthalten ist, wird daher seyn

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

oder, wenn man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von x, y und z substituirt,

$$\varrho = \frac{r}{Q \cos.\psi}, \text{ oder endlich}$$

$$\frac{r}{\varrho} = \sin.(\varphi+\beta) \cos.\psi + \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma \sin.\psi$$
$$+ \tang.\delta . \sqrt{[\cos.(\varphi+\beta)\cos.\psi - \sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma \sin.\psi]^2 + \sin.^2\gamma \sin.^2\psi},$$

und ganz denselben Ausdruck für die Schattenlänge ϱ haben wir auch oben (S. 24) durch sphärische Trigonometrie gefunden.

§. 16.

Dasselbe in dem Vorhergehenden gebrauchte Verfahren wird sich nun auch auf krumme Uhrflächen anwenden lassen. Sey die Fläche durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten ξ, v und ζ gegeben, von denen ξ in der Mittagslinie des Horizonts und ξ, v im Horizonte liegen. Um aus dieser Gleichung die Gleichung der Uhrfläche zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten x, y und z abzuleiten, wo x in dem Durchschnitte des Meridians mit dem Aequator und x, y in der Ebene des Aequators liegen, wird man in der gegebenen Gleichung

$$\xi = z \cos.\varphi + x \sin.\varphi,$$
$$v = y,$$
$$\zeta = z \sin.\varphi - x \cos.\varphi$$

setzen. Verbindet man dann die so erhaltene Gleichung der

Uhrfläche zwischen x, y und z mit der Gleichung der Stundenebene

$$y = x \, tang. s,$$

so hat man die zwei gesuchten Gleichungen der Schattenlinie, da diese der Durchschnitt der Stundenebene mit der Uhrfläche ist. Diese zwei Gleichungen sind eigentlich nur den Projectionen der krummen Schattenlinie in zweien der drei coordinirten Ebenen von xy, xz und yz gleichgeltend. Da aber die eine dieser Gleichungen, $y = x \, tang. s$, für eine Ebene gehört, so sind diese Schattenlinien selbst ebene Curven, die nämlich alle in der schneidenden Fläche der Stundenebene enthalten sind. Um daher die Gleichungen dieser in der Stundenebene liegenden Schattencurven zu finden, von welchen jene beiden Gleichungen die Projectionen in den coordinirten Ebenen ausdrücken, sey t die Abscisse eines Punktes dieser Curve, und u die darauf senkrechte Ordinate, wo t in der Durchschnittslinie der Stundenebene mit dem Aequator liegt, so wird man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen eine andere zwischen x und z, oder eine zwischen y und z ableiten, und dann in diesen letzten Gleichungen $x = t \, cos. s$ und $z = u$, oder $y = t \, sin. s$ und $z = u$ setzen, wodurch man die Gleichung zwischen t und u der Schattenlinie in der Stundenebene erhält. Wir wollen sie zum Unterschiede der oben betrachteten Projektionen der Schattenlinien, die Schattencurve selbst nennen. Die Gleichung der Schattencurve wird im Allgemeinen eine Funktion von dem Stundenwinkel s und der Polhöhe φ des Ortes, und von gegebenen Größen seyn, welche letzte durch die Gestalt und Lage der gegebenen Uhrfläche bestimmt werden. Setzt man daher in dieser Gleichung bei einem gegebenen Werthe von φ für s die Werthe 15°, 30°, 45°..., so wird man die auf einander folgenden Schattencurven für die 1ste, 2te, 3te ... Stunde erhalten, und sie auf der Stundenebene verzeichnen, oder von dieser auf die Uhrfläche übertragen können. Setzt man aber

für denselben Werth von s die Größe φ gleich 0°, 10°, 20°... bis 90°, so wird man die Schattencurven erhalten, die für dieselbe Stunde unter verschiedenen Polhöhen Statt haben. Für s = 0 endlich wird man die Schattencurve des wahren Mittags erhalten.

Verbindet man aber jene zwei ersten Gleichungen in x, y und z, der Uhrfläche und der Stundenebene, mit der Gleichung des oben betrachteten Kegels

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2 \, cotang.^2 \, \delta,$$

wofür man hier, wegen der Gleichung $y = x \, tang. \, s$ den einfacheren Ausdruck

$$x = (z - r) \, cos. \, s \, cotang. \, \delta,$$

oder $$y = (z - r) \, sin. \, s \, cotang. \, \delta$$

setzen kann, so hat man drei Gleichungen zwischen x, y und z, die zusammen genommen den Punkt bestimmen, in welchem sich die Uhrfläche, die Stundenebene und jener Kegel schneiden, d. h. die zusammen genommen für den Endpunkt des Schattens gehören. Eliminirt man daher aus diesen drei Gleichungen je zwei der drei Größen x, y, z, so erhält man die drei Coordinaten des Schattenendes als Funktionen von s, φ, δ und den gegebenen Größen der Uhrfläche. Da der Anfangspunkt aller dieser Coordinaten in dem Fußpunkte des Stieles, wo dieser die Uhrfläche trifft, ist, so wird die Entfernung jenes Schattenendes von dem Anfangspunkte der Coordinaten gleich $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ seyn. Wir wollen diese Entfernung die Länge des Schattens nennen, da sie eigentlich die geradlinige Sehne desjenigen Theiles der Schattencurve ausdrückt, welcher zwischen dem Anfangspunkte der Coordinaten und dem Schattenende in dieser Curve enthalten ist. Diese Größe ϱ wird also wieder eine Funktion der Länge des Stiels, die wir durch r bezeichneten, und der Größen s, φ und δ seyn. Nimmt man daher in dem Ausdrucke für ϱ bloß die Größe s veränderlich von 0 bis 360°, so erhält man dadurch in jeder der bereits oben gefundenen

auf einander folgenden Schattencurven den Endpunkt des Schattens, und wenn man alle diese Punkte auf der Uhrfläche verbindet, so erhält man die krumme Linie, welche der Endpunkt des Schattens auf der Uhrebene während dem Laufe eines gegebenen Tages, für welche die Deklination der Sonne gleich δ ist, und für einen Ort auf der Oberfläche der Erde zurücklegt, dessen geographische Breite gleich φ ist. Verzeichnet man diese Curven des Schattenendes für mehrere auf einander folgende Werthe von δ, so wird man dadurch die Uhrfläche gleichsam mit einem Netze von Curven überziehen, deren jede den Lauf des Schattenendes für eine gegebene Jahreszeit darstellt. Läßt man aber in dem gegebenen Ausdrucke von ϱ die Größe s constant seyn, und variirt bloß die Deklination δ, so erhält man die Curve derjenigen Punkte, in welche, für dieselbe Stunde, das Ende des Schattens in den verschiedenen Jahreszeiten fällt, also z. B. die Curve, welche das Schattenende während dem Laufe des ganzen Jahres im Augenblicke des wahren Mittags angibt, wenn $s = 0$ ist, oder endlich auch im Augenblicke des mittleren Mittags, wenn man für jeden Werth von δ die ihm entsprechende Zeitgleichung für s setzt.

Wir wollen nun auf das Vorhergehende einige Beispiele anwenden, und zuerst für die Uhrfläche einen Cylinder mit kreisförmiger Basis annehmen, dessen Axe horizontal und parallel mit der Axe der y liegt. Der Halbmesser der Basis dieses Cylinders soll a und der Anfangspunkt der Coordinaten in dem Punkte der Peripherie der Basis seyn, wo diese von dem Horizonte geschnitten wird. In diesem Punkte wird also auch der Stiel, dessen Länge gleich r ist, parallel mit der Weltaxe errichtet. Dieses vorausgesetzt, hat man für die Gleichung des Cylinders

$$\xi^2 - 2a\xi + \zeta^2 = 0.$$

Wenn man die Coordinaten x, y, z auf den Aequator bezieht, wo der Stiel mit der Axe der z zusammen fällt und

x, y in der Ebene des Aequators liegen, so wird die Gleichung unsers Cylinders seyn

$$x^2 + z^2 = 2a\,(x\;sin.\,\varphi + z\;cos.\,\varphi).$$

Die Gleichung der Stundenebene aber ist

$$y = x\;tang.\;s.$$

Beide Gleichungen zusammen geben die zwei Projektionen der Schattenlinien für jeden Werth von s. Um die Gleichung der Schattencurven selbst in den Stundenebenen zu erhalten, wird man in den ersten der vorhergehenden Gleichungen $x = t\;cos.\,s$ und $z = u$ setzen, wodurch man für diese Schattencurve erhält

$$u^2 + t^2\;cos.^2 s = 2a\,(u\;cos.\,\varphi + t\;sin.\,\varphi\;cos.\,s).$$

Aus diesem Ausdrucke folgt, daß die Schattencurve immer eine Ellipse ist. Die mittägige Schattencurve erhält man, wenn man in der letzten Gleichung $s = o$ setzt, daher ihre Gleichung ist

$$u^2 + t^2 = 2a\,(u\;cos.\,\varphi + t\;sin.\,\varphi),$$

die also für einen Kreis gehört.

Verbindet man jene zwei ersten Gleichungen mit der des Kegels

$$(x^2 + y^2) = (z - r)^2\;cotang.^2\,\delta,$$

so erhält man, wenn man y eliminirt,

$$x = (z - r)\;cos.\,s\;cotang.\,\delta \text{ und}$$

$$x = a\;sin.\,\varphi + \sqrt{2az\;cos.\,\varphi + a^2\,sin.^2\varphi - z^2}.$$

Setzt man diese beiden Werthe von x einander gleich, so erhält man für den Werth von $z.(1 + cos.^2 s\;cotang.^2\,\delta)$

$$r\;cos.^2 s\;cotang.^2\,\delta + a\,(sin.\,\varphi\;cos.\,s\;cotang.\,\delta + cos.\,\varphi)$$

$$+ \sqrt{\begin{array}{l} a^2\,(sin.\,\varphi\;cos.\,s\;cotang.\,\delta + cos.\,\varphi)^2 \\ + 2ar\;cos.\,s\;cotg.\,\delta\,(cos.\,\varphi\;cos.\,s\;cotg.\,\delta - sin.\,\varphi) \\ - r^2\;cos.^2 s\;cotang.^2\,\delta. \end{array}}$$

Kennt man aber so den Werth von z, so erhält man auch x und y aus

$$x = (z - r)\;cos.\,s\;cotang.\,\delta \text{ und}$$

$$y = (z - r)\;sin.\,s\;cotang.\,\delta,$$

und daraus endlich den Werth der Schattenlänge ϱ durch die Gleichung

$$\varrho^2 = z^2 + (z - r)^2 \cos.^2 s \; cotg.^2 \delta + (z - r)^2 \sin.^2 s \; cotg.^2 \delta,$$

oder durch

$$\varrho = \sqrt{z^2 - (z - r)^2 \; cotang.^2 \delta}.$$

In einem zweiten Beispiele sey ein ähnlicher Cylinder gegeben, dessen Axe senkrecht auf dem Horizonte steht, und dessen Gleichung daher ist

$$\xi^2 - 2a\xi + \upsilon^2 = 0,$$

oder in Beziehung auf den Aequator

$$(z \cos.\varphi + x \sin.\varphi)^2 - 2a(z \cos.\varphi + x \sin.\varphi) + y^2 = 0.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $y = x \; tang.\, s$, und dann $x = t \cos.\, s$ und $z = u$, so erhält man für die Gleichung der Schattencurve auf der Stundenebene

$$(u \cos.\varphi + t \sin.\varphi \cos.s)^2 - 2a(u \cos.\varphi + t \sin.\varphi \cos.s) + t^2 \sin.^2 s = 0.$$

Diese Curve ist also immer eine Ellipse, da das Quadrat des Faktors von $u\,t$ kleiner ist, als das vierfache Produkt der Faktoren von u^2 und t^2. Für die mittägige Schattencurve hat man $s = 0$, also ihre Gleichung

$$u \cos.\varphi + t \sin.\varphi = 2a.$$

Für $\varphi = 90^0$ endlich ist

$$t = 2a \cos.s$$

die bekannte Gleichung des Kreises.

Verbindet man die vorhergehende Gleichung

$$(z \cos.\varphi + x \sin.\varphi)^2 - 2a(z \cos.\varphi + x \sin.\varphi) + x^2 \, tg.^2 s = 0$$

mit der Gleichung des Kegels

$$x = (z - r) \cos.s \; cotang.\delta,$$

und eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe x, so erhält man

$$(z - r)^2 (m^2 + \sin.^2 s \; cotg.^2 \delta) + 2(z - r)(m r \cos.\varphi - ma) = 2ar \cos.\varphi - r^2 \cos.^2 \varphi,$$

wo $m = \cos.\varphi + \sin.\varphi \cos.s \; cotang.\delta$ ist.

Daraus folgt

$$z - r = \frac{m\,(a - r\,cos.\,\varphi)}{m^2 + sin.^2 s\ cotang.^2 \delta}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 m^2 + r\,(2a - r\,cos.\,\varphi)\,cos.\,\varphi\ sin.^2 s\ tang.^2 \delta}}{m^2 + sin.^2 s\ cotang.^2 \delta}.$$

Kennt man so den Werth von z, so ist

$$x = (z - r)\ cos.\,s\ cotang.\,\delta$$

$$y = (z - r)\ sin.\,s\ cotang.\,\delta,$$

also auch

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ oder}$$

$$\varrho = \sqrt{(z - r)^2\ cotang.\,\delta + z^2}.$$

Sey endlich in einem dritten Beispiele ein Kegel mit kreisförmiger Basis gegeben, dessen Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten, dessen Axe auf dem Horizonte senkrecht, und für den der Winkel einer seiner Seitenlinien mit der Axe gleich θ ist, so ist die Gleichung dieses Kegels

$$\xi^2 + v^2 = \zeta^2\ tang.^2 \theta,$$

oder in Beziehung auf den Aequator

$$(z\ cos.\,\varphi + x\ sin.\,\varphi)^2 + y^2 = (z\ sin.\,\varphi - x\ cos.\,\varphi)^2\,.\ tang.^2 \theta.$$

Diese Gleichung mit der $y = x\ tang.\,s$ verbunden, gibt die beiden Projektionen der Schattenlinien in den drei coordinirten Ebenen. Setzt man aber in der ersten Gleichung

$$x = t\ cos.\,s,\ y = t\ sin.\,s \text{ und } z = u,$$

so erhält man für die Gleichung der Schattencurve in der Stundenebene

$$(u\,cos.\,\varphi + t\,sin.\,\varphi\ cos.\,s)^2 - (u\,sin.\,\varphi - t\ cos.\,\varphi\ cos.\,s)^2\ tg.^2 \theta + t^2\ sin.^2 s = 0.$$

Da in diesem Ausdrucke der Faktor

von u^2 gleich $1 - \frac{sin.^2 \varphi}{cos.^2 \theta}$,

ut » $\frac{2\ sin.\,\varphi\ cos.\,\varphi\ cos.\,s}{cos.^2 \theta}$

t^2 » $1 - \frac{cos.^2 \varphi\ cos.^2 s}{cos.^2 \theta}$

ist, so ist die Schattencurve eine Ellipse, eine Hyperbel oder

eine Parabel, wenn $\sin.^2 s \cos.^2 \varphi - \sin.^2 \theta$ positiv, negativ oder Null ist. Für die mittägige Schattencurve hat man $s = 0$ oder

$$u \cos.\varphi + t \sin.\varphi = (u \sin.\varphi - t \cos.\varphi) \, . \, tang.\, \theta.,$$

also eine gerade Linie, deren Projektion in der Ebene de $\xi\zeta$ durch die Gleichung

$$\xi = \zeta \, tang.\theta$$

ausgedrückt wird, so daß also diese gerade Linie eine der Seitenlinien des Kegels ist.

Nimmt man den Winkel $\theta = 45^\circ$, so ist die Gleichung unseres auf den Horizont senkrechten Kegels

$$(z \cos.\varphi + x \sin.\varphi)^2 + y^2 = (z \sin.\varphi - x \cos.\varphi)^2.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit den beiden folgenden

$$y = x \, tang.\, s \text{ und } x = (z - r) \cos.s \; tang.\delta,$$

und eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Größe x und y, so erhält man

$$z^2(1 - 2 \sin.^2\varphi) - (z-r)^2 \cos.^2 s \, cotg.^2 \delta \, (1 - 2 \sin.^2 \varphi - tg.^2 s)$$
$$+ 4 z (z - r) \sin.\varphi \cos.\varphi \cos.s \; cotang.\delta = 0,$$

woraus der Werth von z gefunden wird, und dann ist

$$y = (z - r) \sin.s \; cotang.\delta \text{ und } x = (z - r) \cos.s \; cotang.\delta.$$

Kennt man aber x, y und z, so hat man auch

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + (z - r)^2 \, cotang.^2 \delta}$$

$$\text{oder } \varrho = \frac{1}{\sin.\delta} \, . \, \sqrt{z^2 - (2 r z - r^2) \cos.^2 \delta}.$$

Aus welcher Gleichung man dann, nach dem oben (S. 43) angegebenen Verfahren, alle die krummen, auf der Uhrfläche liegenden Linien ableiten wird, welche der Endpunkt des Schattens sowohl für gegebene Deklinationen, während dem Laufe eines Tages, als auch, für gegebene Stunden, während dem Laufe eines Jahres beschreibt.

§. 17.

Zum Beschlusse dieses Gegenstandes wollen wir noch bemerken, daß man die S. 14 gegebenen Sonnenuhren auf

einer gegen den Horizont und gegen den Meridian willkürlich geneigten Ebene, durch eine sehr einfache Betrachtung unmittelbar aus der für die Horizontaluhren S. 7 gegebenen Gleichung $tang. \psi = sin. \varphi \; tang. s$ ableiten kann. — Ist nämlich n die Neigung der Uhrebene gegen den Horizont, und k ihre Abweichung gegen den Meridian des Ortes, an welchem man die Uhr verzeichnen will, und dessen Polhöhe φ ist, so suche man die Polhöhe φ' und die geographische Länge λ desjenigen Ortes, für welchen jene Uhrebene die Oberfläche der Erde berührt, d. h. mit dem Horizonte dieses zweiten Ortes parallel ist. Man findet aber diese Größen φ' und λ sehr leicht aus der Betrachtung eines sphärischen Dreieckes PAB, in welchem P den Pol des Aequators, A den gegebenen und B den gesuchten Ort bezeichnet. In diesem Dreiecke sind nämlich die drei Seiten $PA = 90^\circ - \varphi$, $PB = 90^\circ - \varphi'$ und $AB = n$. Für die Winkel aber hat man $A = 90^\circ - k$ und $P = \lambda$ die Längendifferenz der beiden Orte. Dieses Dreieck gibt demnach

$$sin. \varphi' = cos. n \; sin. \varphi + sin. n \; cos. \varphi \; sin. k \text{ und}$$

$$tang. \lambda = \frac{tang. n \; cos. k}{cos. \varphi - sin. \varphi \; sin. k \; tang. n}.$$

Kennt man aber φ' und λ, so hat man sofort für die Winkel w' der Schattenlinien mit der Substilarlinie, nach S. 7, die einfache Gleichung

$$tang. w' = sin. \varphi' \; tang. (s + \lambda).$$

Für Vertikaluhren ist $n = 90^\circ$, also jene drei Gleichungen

$$sin. \varphi' = cos. \varphi \; sin. k,$$

$$tang. \lambda = - \frac{cotang. k}{sin. \varphi} \text{ und}$$

$$tang. w' = \frac{tang. s + tang. \lambda}{1 - tang. s \; tang. \lambda} . \; sin. \varphi',$$

oder, wenn man in dem letzten Ausdrucke die Werthe von $tang. \lambda$ und $sin. \varphi'$ substituirt,

$$tang.\, w' = \frac{cos.\, \varphi\ sin.\, k\ (sin.\, \varphi\ sin.\, k\ tang.\, s - cos.\, k)}{cos.\, k\ tang.\, s + sin.\, k\ sin.\, \varphi}$$

vollkommen mit S. 12 übereinstimmend.

So wie hier die Gleichung der Horizontaluhr gebraucht worden ist, um daraus den analytischen Ausdruck für jede andere Uhrebene zu finden, so wird man auch, wie schon S. 8 gesagt worden ist, eine bereits verfertigte Horizontaluhr mit Vortheil anwenden, um mit ihrer Hülfe auf jeder andern ebenen oder krummen Fläche eine Sonnenuhr mechanisch zu verzeichnen. Um dieses eben so einfache als sichere Mittel, Sonnenuhren in jedem Orte zu errichten, Jedermann zugängig zu machen, folgt hier noch eine Konstruktion der Horizontaluhren ohne alle vorläufige Berechnung.

Auf einer ebenen Tafel ziehe man, nahe durch die Mitte derselben, die gerade Linie AR (Fig. 1), und auf sie, nahe an dem äußersten Ende der Tafel, die senkrechte Linie RS, so daß der Winkel ARS = 90° ist. Ueber der ersten Linie AR errichte man ein auf der Tafel senkrecht stehendes Dreieck RAP, wo der Winkel RAP = φ, oder gleich der geographischen Breite des Ortes ist, für welche man die Horizontaluhr verzeichnen will. Jetzt ist nur noch übrig, in der Ebene dieser Tafel zu beiden Seiten von der Linie AR die Schattenlinien AS zu ziehen. Zu diesem Zwecke theile man die Linie AR durch einen Maßstab in 1000 gleiche Theile, und trage dann auf der Linie RS zu beiden Seiten von R die entsprechende Anzahl derselben gleichen Theile auf, wodurch man die Punkte S, S′, S″.. erhält, welche, mit A durch gerade Linien vereiniget, die gesuchten Schattenlinien SA, S′A, S″A.. der Horizontaluhr geben. Diese Entfernungen RS, RS′, RS″.. aber findet man für jede gegebene Polhöhe oder geographische Breite φ aus der beiliegenden Tafel für jede einzelne Viertelstunde von $\varphi = 35°$ bis $\varphi = 70°$, oder für alle Orte Europas. Für Breslau z. B. ist $\varphi = 51°$, also wird man, wenn AR in 1000 gleiche

Theile getheilt ist, zu beiden Seiten von R auf der Linie RS die Längen

RS = 50.9 für 0 Uhr 15 Min.;
RS′ = 102.3 » 0 Uhr 30 Min.;
RS″ = 154.6 » 0 Uhr 45 Min.;
RS‴ = 208.2 » 1 Uhr 0 Min.

u. s. w. nehmen, wo dann die Linien SA, S′A, S″A, S‴A.. die gesuchten Schattenlinien für diese gegebenen Nachmittagsstunden, und auf der andern Seite von AR für die Vormittagsstunden 11 Uhr 45 Min.; 11 Uhr 30 Min.; 11 Uhr 15 Min. u. s. w. seyn werden, während AR selbst die Schattenlinie des Mittags ist. Will man dann die so verfertigte Horizontaluhr auf irgend eine andere ebene oder krumme Fläche übertragen, so wird man das S. 8 angezeigte Verfahren anwenden, und bei dieser Anwendung wird die dort geforderte horizontale Lage der Tafel leicht durch eine Wasserwage; ihre Richtung gegen die Mittagslinie aber durch das bekannte einfache Verfahren erhalten werden, nach welchem man einen vertikalen Stab in dem Mittelpunkte mehrerer concentrischen Kreise aufstellt, und durch je zwei gleiche Schattenlängen des Stabes die Richtung der Mittagslinie, also auch die wahre Zeit des Mittags bestimmt. Dreht man dann die vor die neue Uhrfläche gebrachte und bereits horizontal gestellte Horizontaluhr in dem Augenblicke, wo der Schatten jenes Stabes den wahren Mittag anzeigt, so, daß der Schatten des Stieles AP der Horizontaluhr auf die Linie AR oder auf die Mittagslinie fällt, so wird man, wie a. a. O. gesagt wurde, durch gespannte Fäden die Lage des Stieles sowohl, als auch die Lage und selbst die Länge aller Schattenlinien auf der neuen Uhrfläche eben so einfach als sicher bestimmen können.

Polhöhe.

S.	35°	36°	37°	38°	39°	40°
0h 0'	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0 15	37.6	38.5	39.4	40.4	41.2	42.1
0 30	75.5	77.4	79.2	81.0	82.8	84.6
0 45	114.1	116.9	119.7	122.5	125.2	127.9
1 0	153.7	157.5	161.3	165.0	168.6	172.2
1 15	194.7	199.5	204.3	209.0	213.6	218.2
1 30	237.6	243.5	249.3	255.0	260.7	266.3
1 45	282.9	289.9	296.8	303.6	310.4	317.0
2 0	331.2	339.4	347.5	355.5	363.3	371.1
2 15	383.3	392.7	402.1	411.4	420.5	429.5
2 30	440.1	451.0	461.8	472.4	482.9	493.2
2 45	503.0	515.5	527.8	539.9	551.9	563.7
3 0	573.6	587.8	601.8	615.7	629.3	642.8
3 15	654.0	670.2	686.2	702.0	717.6	733.0
3 30	747.5	766.0	784.3	802.4	820.1	837.7
3 45	858.4	879.7	900.7	921.4	941.8	962.0
4 0	993.5	1018.1	1042.3	1066.3	1090.0	1113.3
4 15	1163.1	1191.9	1220.3	1248.4	1276.1	1303.4
4 30	1384.8	1419.1	1452.9	1486.3	1519.3	1551.9
4 45	1689.7	1731.5	1772.9	1813.7	1853.9	1893.6
5 0	2140.6	2196.7	2246.0	2297.7	2348.6	2398.9
5 15	2883.6	2955.0	3025.5	3095.1	3163.8	3231.6
5 30	4356.8	4464.7	4571.2	4676.4	4780.2	4882.5
5 45	8751.1	8967.9	9181.9	9393.2	9601.6	9807.1
6 0	∞					

Polhöhe.

S.	41°	42°	43°	44°	45°	46°
0h 0′	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	43.0	43.9	44.7	45.5	46.3	47.1
30	86.4	88.1	89.0	91.5	93.1	94.7
45	130.5	133.1	135.7	138.2	140.7	143.1
1 0	175.8	179.3	182.7	186.1	189.5	192.7
15	222.7	227.1	231.5	235.8	240.0	244.2
30	271.7	277.2	283.1	287.7	292.9	298.0
45	323.5	330.0	336.3	342.6	348.7	354.7
2 0	378.8	386.3	393.8	401.1	409.2	415.3
15	438.4	447.1	455.7	464.2	472.5	480.6
30	503.4	513.4	523.3	533.0	542.6	552.0
45	575.4	586.7	598.1	609.2	620.1	630.8
3 0	656.1	669.1	682.0	694.7	707.1	719.3
15	748.1	763.0	777.7	792.1	806.3	820.2
30	855.0	872.0	888.8	905.3	921.5	937.5
45	981.9	1001.4	1020.6	1039.7	1058.2	1076.5
4 0	1136.3	1159.0	1181.2	1203.2	1224.7	1245.9
15	1330.3	1356.8	1382.9	1408.6	1433.8	1458.6
30	1583.8	1615.4	1646.5	1677.1	1707.1	1736.6
45	1932.7	1971.2	2009.1	2046.4	2083.1	2119.1
5 0	2448.4	2497.2	2545.2	2592.5	2639.0	2684.6
15	3298.2	3364.0	3428.6	3492.3	3554.9	3616.4
30	4983.2	5082.6	5180.2	5276.4	5371.1	5463.9
45	10009.5	10208.9	10405.0	10598.4	10788.4	10975.0
6 0	∞					

Polhöhe.

S.	47°	48°	49°	50°	51°	52°
0ʰ 0′	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	47.9	48.7	49.5	50.2	50.9	51.6
30	96.3	97.8	99.4	100.9	102.3	103.7
45	145.5	147.8	150.1	152.4	154.6	156.7
1 0	196.0	199.1	202.2	205.3	208.2	211.2
15	248.3	252.3	256.2	260.0	263.8	267.5
30	302.9	307.8	312.6	317.3	321.9	326.4
45	360.7	366.5	372.2	377.8	383.3	388.6
2 0	422.3	429.1	435.7	442.3	448.7	455.0
15	488.7	496.6	504.3	511.9	519.3	526.5
30	561.2	570.2	579.1	587.8	596.3	604.7
45	641.4	651.7	661.9	671.8	681.5	691.1
3 0	731.4	743.1	754.7	766.0	777.2	788.0
15	834.0	847.4	860.6	873.5	886.2	898.6
30	953.1	968.5	983.6	998.3	1012.8	1027.0
45	1094.5	1112.2	1129.5	1146.5	1163.1	1179.4
4 0	1266.7	1287.0	1307.2	1326.8	1346.0	1364.9
15	1483.0	1506.9	1530.4	1553.4	1575.8	1597.9
30	1765.6	1794.1	1822.0	1849.4	1876.2	1902.4
45	2154.5	2189.2	2223.3	2256.7	2289.4	2321.4
5 0	2729.5	2773.5	2816.6	2858.9	2900.3	2940.9
15	3676.8	3736.0	3794.2	3851.2	3907.0	3961.6
30	5555.2	5644.7	5732.6	5818.7	5903.0	5985.5
45	11158.3	11338.2	11514.7	11687.6	11857.0	12022.7
6 0	∞					

Polhöhe.

S.	65°	66°	67°	68°	69°	70°
0h 0'	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	59.4	59.9	60.3	60.8	61.2	61.6
30	119.3	120.3	121.2	122.1	122.9	123.7
45	180.3	181.7	183.1	184.4	185.7	186.9
1 0	242.8	244.8	246.6	248.4	250.2	251.7
15	307.7	310.1	312.5	314.7	316.9	319.0
30	375.4	378.4	381.3	384.0	386.7	389.2
45	446.9	450.5	454.0	457.2	460.4	463.4
2 0	523.3	527.4	531.5	535.3	539.0	542.5
15	605.6	610.4	615.1	619.5	623.8	627.9
30	695.4	701.0	706.3	711.5	716.4	721.0
45	794.8	801.2	807.3	813.1	818.7	824.1
3 0	906.3	913.5	920.5	927.2	933.6	939.7
15	1033.4	1041.7	1050.0	1057.2	1064.5	1071.5
30	1181.1	1190.6	1199.6	1208.3	1216.6	1224.7
45	1356.4	1367.2	1377.6	1387.6	1397.2	1406.3
4 0	1569.8	1582.3	1594.3	1605.9	1617.0	1627.6
15	1837.8	1852.5	1866.6	1880.1	1893.1	1905.5
30	2188.0	2205.5	2222.2	2238.5	2253.9	2321.5
45	2669.9	2691.2	2711.7	2731.4	2750.2	2768.2
5 0	3382.4	3409.4	3435.4	3460.3	3484.2	3507.0
15	4556.3	4592.8	4627.6	4661.3	4693.4	4724.1
30	6884.0	6939.1	6991.8	7042.6	7091.4	7137.5
45	13827.6	13938.0	14044.2	14146.1	14243.7	14336.9
6 0	∞					

Fig. 3.

P S' A' a c m r b R A C M B D

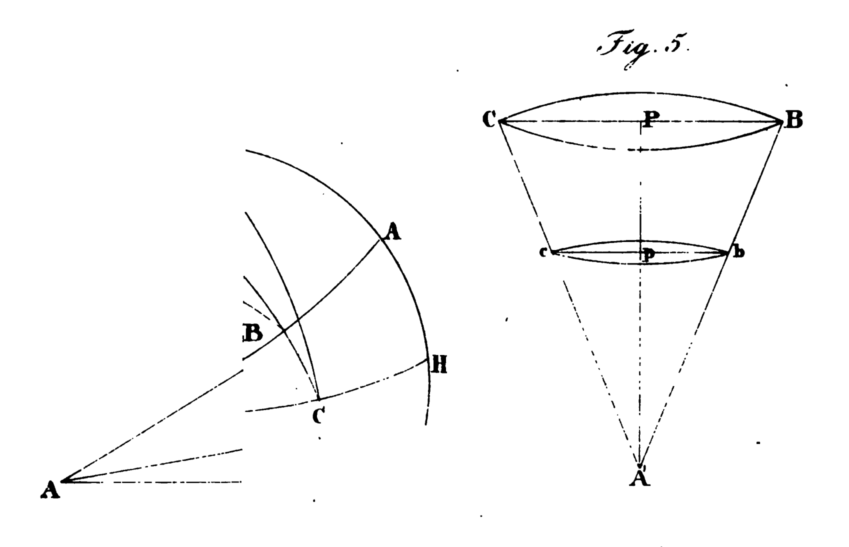


Fig. 5.

